



Pro gradu -tutkielma
Tähtitiede

***Planck*-satelliittidatan simulointi:
Signaalivuodon eristäminen matriisi-ikkunafunktiolla**

Kimmo Kiiveri
2015

Ohjaaja: Hannu Kurki-Suonio
Tarkastajat: Hannu Kurki-Suonio
Karri Muinonen

HELSINGIN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

PL 64 (Gustaf Hällströmin katu 2)
00014 Helsingin yliopisto

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Fysiikan laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Kimmo Kiiveri			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Planck-satelliittidatan simulointi: Signaalivuodon eristäminen matriisi-ikkunafunktiolla			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tähtitiede			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	
Pro gradu -tutkielma		2015	
		Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages	
		94 s.	
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Havaittavaan maailmankaikkeuteen lähes tasaisesti jakaantunut ja noin 380 000 vuotta sitten synty- nyt kosminen mikroaaltotaustasäteily on merkittävin yksittäinen havaittavan kosmologian tiedon- lähde. Tämä taustasäteily on matkannut sen syntyhetkestä lähtien halki maailmankaikkeuden laa- jenemishistorian aina herkkiin mittalaitteisiimme saakka, ja täten se on sekä suora havaintoikkuna nuoreen maailmankaikkeuteen, että tärkeä havaintoaineisto maailmankaikkeuden laajenemishisto- riasta. Vuonna 1992 NASA lähetti matkaan ensimmäisen taustasäteilyn epäisotropioita kartoitta- van COBE-satelliitin, jonka mittaustulosten ja tätä seuranneiden satelliittimissioden, WMAPin ja Planckin, ansiosta nykykosmologiasta on tullut täsmätiedettä.</p> <p>Vuonna 2009 laukaistun Planck-satelliitin perintö kosmologialle tulee olemaan unohtumaton. Jot- ta sen tarkat mittaustulokset saadaan luotettaviksi, tulee satelliitin havaintokeilat tuntea hyvin, sillä keiloista aiheutuvat efektit ovat suuria systemaattisten virheiden lähteitä. Havaintokeiloilla tarkoitetaan satelliitin yksittäisen detektorin, tai vaihtoehtoisesti useampien detektorien, spatiaa- lista vastetta, johon on huomioitu satelliitin skannausstrategiasta, datan käsittelystä, detektorista ja optiikasta aiheutuvat efektit. Tavallisesti nämä havaintokeilat on tapana esittää harmonisessa avaruudessa, mitatun tai simuloidun datan jatkoanalyysiä varten, jolloin niistä käytetään nimitystä skalaari-ikkunafunktio. Näiden skalaari-ikkunafunktioiden on todettu sisältävän ylimääräisiä sys- temaattisia efektejä, erityisesti lämpötila- ja polarisaatiosignaalin välistä vuotoa, joiden oletetaan olevan seurausta satelliitin samaan syöttötorveen kytkettyjen kahden detektorin välisten havainto- keilojen eroista.</p> <p>Tässä työssä esitetään uudenlainen malli, jolla voidaan vähentää kosmisen mikroaaltotaustasätei- lyn epäisotropioita kartoittavan satelliitin instrumenteista ja skannausstrategiasta aiheutuvia yli- määräisiä efektejä, erityisesti signaalivuotoa lämpötilan ja polarisaation välillä. Vaikka tätä mallia on esitelty tässä tutkielmassa erityisesti Planck-satelliitin matalan taajuuden instrumenttien (engl. Low Frequency Instrument, LFI) taustasäteilyä koskevan signaalivuodon eristämiseen, soveltuu se käytettäväksi niin Planckin korkean taajuuden instrumenteille kuin myös signaalivuodon eristämi- seen etualan säteilystä. Tästä mallista käytetään nimitystä matriisi-ikkunafunktio, ja se on vuonna 2015 kehitetty Helsingin yliopiston Planck-tutkimusryhmän yhteistyönä.</p> <p>Tässä tutkielmassa tarkastellaan CMB Monte Carlo –simulaatioiden avulla, miten havaintokeilo- jen erilainen muoto eri detektorien välillä vaikuttaa vuotokomponenttien suuruuteen. Erityisesti matriisi-ikkunafunktiomallin simulaatioilla näytetään, miten nämä signaalivuodot saadaan tehok- kaasti eristettyä omiksi komponenteikseen, ja miten matriisi-ikkunafunktiota voidaan hyödyntää todenmukaisen taivaan lämpötilan ja polarisaation kulmatehospektrien rekonstruoinnissa. Näis- tä rekonstruoiduista taivaan kulmatehospektreistä voidaan puolestaan selvittää nykykosmologialle merkittävät kosmologiset parametrit, jotka karakterisoivat maailmankaikkeuden rakennetta, syntyä ja kehitystä.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Kosmologia, kosminen taustasäteily, data-analyysi			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Maailmankaikkeuden synty	1
1.2	Kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn tutkiminen	1
1.3	Tämän tutkielman tavoite	5
2	Nykykäsitys kosmologiasta	7
2.1	Merkittävimpiä kosmologisia havaintoja	7
2.2	Aika-avaruuden geometria	10
2.3	Friedmannin yhtälöt	11
2.4	Kosminen inflaatio	13
2.4.1	Laakeusongelma	14
2.4.2	Horisonttiongelman	15
2.4.3	Magneettisten monopolien ongelma	17
2.4.4	Yhden kentän slow-roll inflatoni ja sen häiriöt	17
2.5	Kosmisen taustasäteilyn epäisotropioiden statistiikka	20
2.5.1	Multipoliekspansio	20
2.5.2	Lämpötilavaihteluiden kulmatehospektrit	22
2.5.3	Polarisaation kulmatehospektrit	25
2.6	Kosmologiset parametrit	27
3	Planckin keilat ja ikkunafunktiot	29
3.1	Keilojen määritelmät	29
3.2	Keilojen skalaari-ikkunafunktiot	38
3.3	Matriisi-ikkunafunktiot	39
3.4	Pikseli-ikkunafunktiot	42
3.5	Havaitun signaalin mallintaminen - signaalin ja keilojen konvoluutio	45
4	Kartanteko aikajärjestetystä datasta	47
4.1	Kartanteko-ongelma	47
4.2	Kartan ratkaiseminen destriping-menetelmällä	49
5	Matriisi-ikkunafunktion simulaatiot	53
5.1	CMB Monte Carlo -simulaatiot	53
5.2	Matriisi-ikkunafunktion elementtien arvioiminen	55
5.3	Läheisten sivukeilojen vaikutus	59

5.4	Etäisten sivukeilojen vaikutus	59
5.5	Matriisi-ikkunafunktion elementtien käyttäytyminen	59
5.6	Matriisi-ikkunafunktioiden validointi	70
6	Yhteenveto	73
	Liite A Liitteet	79

Luku 1

Johdanto

1.1 Maailmankaikkeuden synty

Tarkkoihin kosmologisiin havaintoihin nojaavan alkuräjähdysteorian mukaan maailmankaikkeutemme syntyi äärimmäisen kuumasta ja tiheästä tilasta noin 13.82 miljardia vuotta sitten. Koska ei tiedetä, kuinka kauan niin kutsuttu maailmankaikkeuden *inflaatiovaihe* on kestänyt¹, voidaan maailmankaikkeuden alun yhteydessä puhua vain inflaation aikaisista ja sen jälkeisistä tapahtumista.

Inflaatiovaiheen aikana maailmankaikkeus koki eksponentiaalisen laajenemisen. Inflaatiota ohjanneet kvanttikentät (tai kenttä) vapauttivat inflaatiovaiheen päätteeksi valtavan määrän potentiaalienergiaa, mikä synnytti tiheän ja kuuman kvarkki-gluoniplasman. Tämä erittäin energeettinen hiukkaspuuro ei pystynyt vielä sitomaan hadroneita yhteen, ja vasta kun alati laajeneva maailmankaikkeus oli jäähtynyt hadronien sidosenergioiden (10^{-6} sekuntia alkuräjähdyksestä) alapuolelle, pystyivät kvarkit muodostamaan vakaita hadroneita, kuten protoneita ja neutroneita.

Hadronien epookin aikoihin maailmankaikkeus oli edelleen liian kuuma muodostaakseen atomeita. Fotonit ja varatut hiukkaset törmäilivät jatkuvasti toisiinsa, mikä teki maailmankaikkeudesta läpinäkyvämmän. Vasta, kun aikaa oli kulunut noin 380 000 vuotta alkuräjähdyksestä, oli maailmankaikkeuden energiatiheys pudonnut tarpeeksi, jotta elektronit ja protonit pystyivät yhtymään kevyiksi vety-atomeiksi (massaosuus $\sim 75\%$) ja helium-atomeiksi (massaosuus $\sim 25\%$). Tämän *rekombinaatioksi* kutsutun prosessin seurauksena maailmankaikkeudesta tuli sähköisesti neutraali ja läpinäkyvä, eli fotonit pystyivät nyt ensimmäistä kertaa etenemään vapaasti laajenevassa maailmankaikkeudessa törmäilemättä toisiin hiukkasiin. Nämä fotonit voidaan nykyään havaita *kosmisena mikroaaltotaustasäteilynä*, joka on yksi havaitsevan kosmologian tärkeimmistä tutkimuskohteista.

1.2 Kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn tutkiminen

Koko havaittavaan maailmankaikkeuteen lähes tasaisesti jakautunut kosminen mikroaaltotaustasäteily (engl. Cosmic Microwave Background, CMB) on viimeisen 50 vuoden ajan ollut merkittä-

¹Inflaatio on pyyhkinyt kaiken informaation siitä mahdollisesti edeltäneistä hetkistä ja on myös mahdollista, että inflaatiovaihe on kestänyt äärettömän kauan, jolloin sitä edeltäneet tapahtumat ovat puhdasta spekulatiota.

vin tiedonlähde maailmankaikkeuden rakenteesta, koostumuksesta ja geometriasta. Taustasäteilyn syntyhetkellä maailmankaikkeus oli noin 1100 kertaa nykyistä pienempi ja sen lämpötila oli jäähtynyt keskimäärin 3000 Kelviniin. Tämä taustasäteily on kaukaisinta sähkömagneettista säteilyä, jota voimme havaita herkillä radioteleskoopeilla.

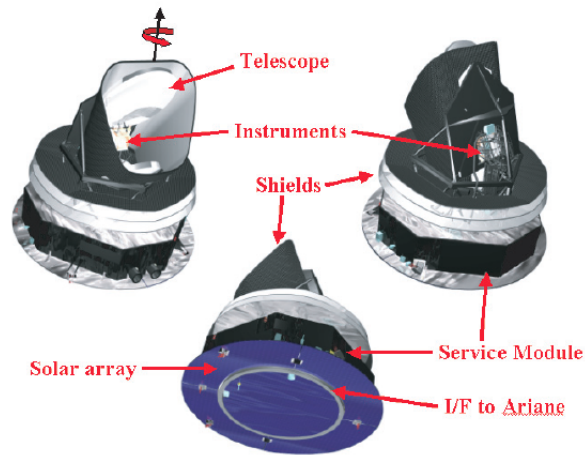
Kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn löysivät sattumalta vuonna 1965 kaksi yhdysvaltalaisista fyysikköä Arno Penzias ja Robert Wilson, mistä he myöhemmin saivat fysiikan Nobel-palkinnon [1]. Varsinainen läpimurto taustasäteilyn tutkimuksessa tapahtui vuonna 1992, kun NASAn ensimmäinen taustasäteilyä kartoittava satelliitti, Cosmic Background Explorer eli COBE, vahvisti pienet, 10^{-4} K luokkaa olevat, lämpötilapoikkeamat taustasäteilyssä [2]. Ennen näiden lämpötilapoikkeamien eli epäisotropioiden havaitsemista kuitenkin tiedettiin, maanpäällisten mittauksen ansiosta, että taustasäteilyllä on lähes mustan kappaleen säteilyspektri ja sen keskilämpötila on noin 2.7 Kelviniä, mitkä myös COBE vahvisti. Wienin siirtymälain mukaisesti tämän säteilyspektrin huippu on noin taajuuden 160 GHz (aallonpituuden $\lambda = 1$ mm) kohdalla. Taustasäteilyn lämpötilan epäisotropioita vastaavat pienet materian harventumat ja tihentymät, ja näitä tihentymiä pidetään nykyisin havaittavien tähtien ja galaksien siemeninä. Taustasäteilyn epäisotropioiden alkuperä on, nykykäsityksen mukaan, seurausta inflaation aikaisista kvanttifluktuaatioista. Siispä taustasäteily on suora havaintoikkuna hyvin varhaiseen maailmankaikkeuteen. Se tarjoaa puitteet erittäin korkeaan energian fysiikan tutkimiselle tavalla, johon ei nykyiset, eivätkä välttämättä tulevatkaan, hiukkaskiihdyttimet tule energioillaan yltämään.

Taustasäteilyn epäisotropioiden tarkka mittaaminen on erittäin tärkeää nykykosmologian kannalta. Mitä herkempi mittalaite on lämpötilavaihteluita mitannut, sitä tarkemman kuvan mittauksiin sovitettujen kosmologisten mallien antavat muun muassa maailmankaikkeuden geometriasta, iästä sekä pimeään aineeseen ja pimeään energian osuuksista. Koska COBE-satelliitilla oli varsin karkea, noin 7° , kulmaerotuskyky, pystyi sillä näkemään vain tätä suurempia rakenteita. Myöskään maanpäälliset havainnot eivät tuolloin tarjonneet merkittävää tarkennusta pienempien kokoskaalojen havaitsemiseen mikroaaltoja absorboivan ilmakehän vuoksi. Niinpä tarkempia taustasäteilyn epäisotropiaa mittaavia satelliitteja tarvittiin.

Vuonna 2001 NASA laukaisi toisen koko taivaan mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilavaihteluita kartoittavan satelliitin, Wilkinson Microwave Anisotropy Proben eli WMAPin, joka asetettiin kiertämään Maa-Aurinko-systeemin toista Lagrangen pistettä. Nämä Lagrangen pisteet ovat avaruudessa olevia alueita, joissa kahden massiivisen ja toisiaan kiertävän kappaleen vetovoimat ja keskipakovoima kumoavat sopivasti toisensa siten, että kolmas pienimassainen kappale pystyy pysyttelemään likimain stabiililla radalla suhteessa kahteen muuhun kappaleeseen. WMAPin kulmaerotuskyky oli $13'$, mikä oli 33 kertaa tarkempi kuin COBElla ja WMAP havaitsi lämpötilaeroja viidellä eri taajuuskaistalla COBEn kolmen sijaan. Suurempi taajuuskaistojen määrä tarkoitti sitä, että WMAP kykeni COBEa paremmin vähentämään etualasta, eli erityisesti Linnunradan säteilylähteistä, toisista galakseista ja kosmisesta infrapunataustasta, tulevaa valoa, joka taustasäteilykartoituksissa on usein tiellä. WMAP teki yhteensä yhdeksän vuotta mittauksia, ja se poistettiin käytöstä lokakuussa 2010. Satelliitin viimeisimmät tulokset julkistettiin vuonna 2012.

Toukokuussa 2009 Euroopan avaruusjärjestö (ESA) laukaisi ensimmäisen oman taustasäteilyn epäisotropioita mittaavan satelliitinsa, *Planck*-satelliitin, joka oli WMAPin seuraaja. Kuvassa 1.1

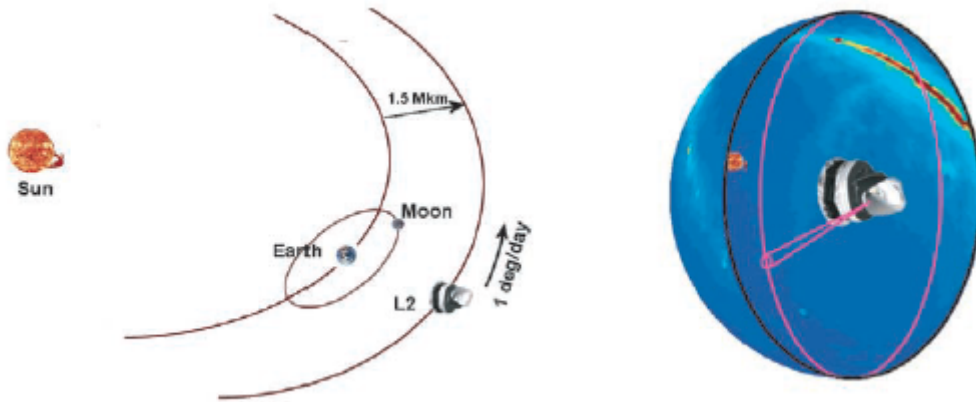
on esitetty Planck-satelliitti ja sen tärkeimmät osat. Planck asetettiin kiertämään, WMAPin tavoin, Maa-Aurinko-systeemin toista Lagrangen pistettä 400 000 km:n säteiselle Lissajous'n radalle noin 1.5 miljoonan kilometrin etäisyydelle Maasta [3]. Kuvassa 1.2 näkyy Planckin kiertorata Auringon ympäri L2-pisteen läheisyydessä. Planckin kulmaerotuskyky oli 5' ja se kattoi yhdeksän



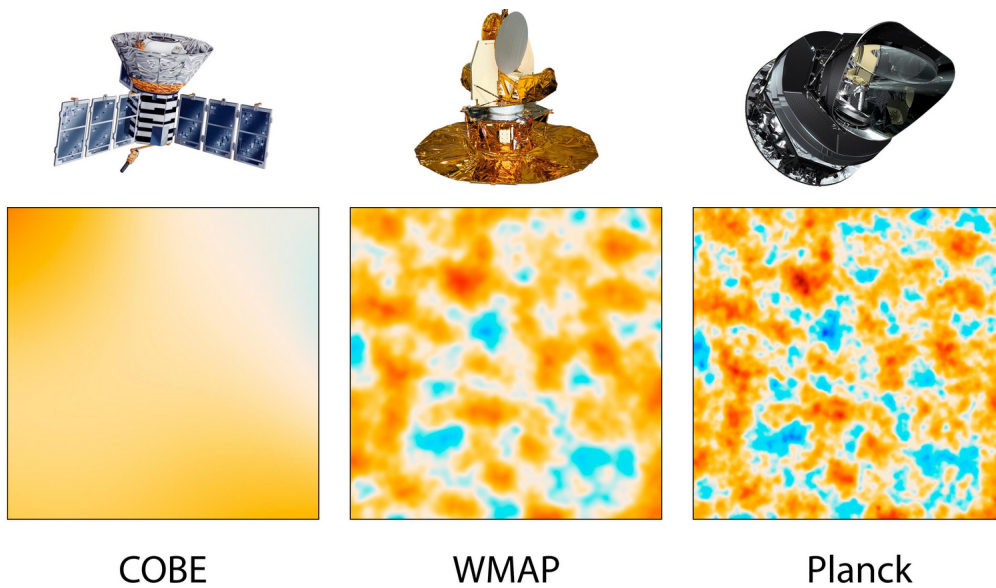
Kuva 1.1: Kuva Planck-satelliitista. Sisääntuleva valo heijastuu pääpeilistä apupeilin kautta polttotasolle. Polttotasolla sijaitsevat matalan taajuuden instrumentit (engl. Low Frequency Instrument, LFI) ja korkean taajuuden instrumentit (engl. High Frequency Instrument, HFI). Pääpeiliä ympäröivä suojalevy vähentää hajavalon pääsyä polttotason mittausinstrumentteihin ja ohjaa instrumenteista tulevan ylimääräisen lämpösäteilyn avaruuteen. Huoltomoduli, joka sisältää kaikki lämpimät elementit, ja hyötykuormamoduli, joka on pidettävä herkkien mittausten vuoksi matalissa lämpötiloissa, ovat eristetty toisistaan suippenevilla, peilimäisillä kilvillä. Satelliitin pyörimisakseli on asetettu osoittamaan aina pois päin Auringosta siten, että satelliitille tehoa antava aurinkokenno osoittaa aina kohti Aurinkoa. Kuvan lähde [3].

taajuuskaistaa 30 GHz:sta 857 GHz:iin, WMAPin viiden taajuuden sijaan. Suomalaisen MilliLabin johdolla rakennetut Planckin 70 GHz:n detektorit olivat mittausten osalta tärkeässä roolissa, sillä tällä taajuuskaistalla taustasäteilyn mittaamista vaikeuttavat häiriöt ovat pienimmillään. Planckin detektorit olivat WMAP-satelliitin detektoreita herkemmiä taustasäteilyn polarisaation mittaauksille. Yhdeksän taajuuskanavaa takasivat sen, että Planckilla voitiin mitata taustasäteilyn lämpötilaerot niin tarkasti, että mittauksista voitiin määrittää keskeiset kosmologiset parametrit alle prosentin tarkkuudella. Kuvassa 1.3 nähdään COBEn, WMAPin ja Planck-satelliitin kulmaerotuskykyvertailu samasta taivaanalueesta kuvattuna. Lokakuun 3:ntena 2013 Planck oli onnistuneesti suorittanut kaikki tieteelliset operaationsa ja lokakuun 9. päivä satelliitti asetettiin aurinkokeskiselle kaatopaikkaradalle. Viimeinen poiskytkentäkomento lähetettiin Planckille lokakuun 23. päivä, mikä päätti satelliitin neljän ja puolen vuoden havaintokauden [4].

Planckin tulokset taustasäteilyn lämpötilavaihteluista julkaistiin maaliskuussa 2013 ja tulokset päivitettiin helmikuussa 2015, jolloin samalla Planckin ensimmäiset polarisaatiota koskevat tulokset julkaistiin. Vuoden 2013 julkaistuissa Planckin tuloksissa ei vielä ollut mukana polarisaatiota johtuen muun muassa sen suurehkoista systemaattisista virheistä. Uusien mittausten ja tarkempien simulaatiokokeiden avulla nämä virheet saatiin pienennettyä hyväksyttävälle tasolle.



Kuva 1.2: *Planck*-satelliitin Lissajous'n kiertorata Maa-Aurinko-systeemin Lagrangen toisessa pisteessä. Planckin pyöriähdysnopeus oman akselinsa ympäri oli noin 1 rpm. Kuvan lähde [3].



Kuva 1.3: Mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilan epäisotropioita kuvattuna kolmen eri sukupolven taustasäteilyä mittaavilla satelliiteilla. COBEn, WMAPin ja Planckin kulmaerotuskyvyt parhaimmillaan olivat 7° , $13'$ ja $5'$. Siniset alueet kuvassa vastaavat hieman kylmempiä alueita taivaasta ja keltaiset sekä punaiset alueet hieman kuumempia alueita. Lämpötilavaihtelut kylmien ja kuumien alueiden välillä ovat erittäin pieniä, luokkaa 10^{-4} K. (NASA/JPL).

1.3 Tämän tutkielman tavoite

Planck-datan simulaatiot ovat kriittisessä asemassa data-analyysin kannalta, sillä ne tarjoavat hyvin kontrolloidun testialustan varsinaisen raakadatan analysointityökalujen kehittämiseksi. Simuloitu data pyritään jäljittelemään raakadatan mukaiseksi ja molemmat kulkevat lopulta saman analyysiketjun läpi. Koska raakadataan vaikuttavia efektejä ei aina kunnolla tunneta, analysoidaan niitä simulaatioiden avulla, sillä simulaatioparametreja voidaan kontrolloida toisistaan riippumattomasti ja täten parametrien aiheuttamat efektit selittävät raakadatan käyttäytymistä. Koska Planckin simulaatiodatan tuottaminen vaatii valtavia laskentaresursseja, toteutetaan simulaatiot käytännössä Yhdysvalloissa ja Euroopassa sijaitsevilla supertietokoneilla. Suomessa tehdyissä Planck-simulaatioissa ollaan keskitytty erityisesti matalan taajuuden instrumenttidatan simuloimiseen ja näitä simulaatioita ajetaan CSC-supertietokonekeskuksessa, Kajaanissa.

Tämän tutkielman päätavoite on esitellä uudenlainen malli Planck-satelliitin havaintokeilojen ikkunafunktiolle, joka on toteutettu simuloitujen kulmatehospektrien avulla. Tämä malli tunnetaan nimellä matriisi-ikkunafunktio, ja se on kehitetty Helsingin yliopiston Planck-työryhmän yhteistyönä. Tämän tutkielman matriisi-ikkunafunktion simulaatiotulokset perustuvat Planckin matalan taajuuden instrumentin signaalisimulaatioihin. Vaikka matriisi-ikkunafunktion päätulokset on julkaistu viitteessä [37], ei sitä olla vielä tutkittu tarpeeksi, jotta matriisi-ikkunafunktiomallia voitaisiin käyttää data-analyysin myöhemmissä vaiheissa. Tässä tutkielmassa fenomenologisesti analysoidaan matriisi-ikkunafunktion elementtien käyttäytymistä erilaisilla havaintokeilojen muodoilla 30, 44 ja 70 GHz:lla, joista 44 GHz:n tulokset esitellään. Muiden taajuuksien käytös vastaa 44 GHz:n tuloksia. Lisäksi matriisi-ikkunafunktioiden avulla rekonstruoidaan onnistuneesti 30, 44 ja 70 GHz:n lämpötilan ja polarisaation kulmatehospektrit. Tämä todistaa matriisi-ikkunafunktiomallin toimivuuden.

Taustasäteilytutkimuksen motivoimiseksi johdantoa seuraavassa luvussa (luku 2) tarjotaan yleiskatsaus nykykosmologiasta merkittävimpien havaintojen ja kosmologisen teorian avulla. Tämän tutkielman kannalta tärkeä teoreettinen osio koskee taustasäteilyn epäisotropian statistiikkaa, (lukua 2.5), jossa määritellään nykykosmologialle kenties merkittävin havaintoaineisto, lämpötilavaihteluiden ja polarisaation kulmatehospektrit. Myös taustasäteilyn signaalin analyysissä käytettävä multipoliekspansio käsitellään tässä luvussa. Luvuissa 3-4 käsitellään Planck-satelliitin taustasäteilyn epäisotropioiden data-analyysiä. Luvussa 3 keskitytään määrittelemään Planckin erilaiset keilat ja harmonisessa avaruudessa keilojen profiileja kuvaavat skalaari-, matriisi- ja pikseli-ikkunafunktiot. Lisäksi tässä luvussa käydään läpi havaitun signaalin mallintamista, jota tarvitaan myöhemmin luvun 5 CMB Monte Carlo –simulaatioissa. Luvussa 4 siirrytään käsittelemään Planckin mittaaman tai simulaatioilla mallinnettavan aikajärjestetyn datan projisoimista karttatasolle. Taivaankartoissa olevaa lämpötilavaihteluiden ja polarisaation signaalia voidaan analysoida multipoliekspansiolla, jonka avulla kartoista voidaan laskea havaitut kulmatehospektrit, joissa keilojen vaikutukset ovat mukana. Luku 5 keskittyy matriisi-ikkunafunktioiden mallintamiseen CMB Monte Carlo –simulaatioilla. Tässä luvussa kuvaillaan tutkielmassa käytettyjä simulaatioita, arvioidaan matriisi-ikkunafunktion elementit simulaatioilla ja tarkastellaan matriisi-ikkunafunktion elementtien käyttäytymistä erilaisilla keilan muodoilla. Lopuksi matriisi-ikkunafunktiot validoidaan soveltamalla niitä onnistuneesti todenmukaisen taivaan kulmatehospektrin rekonstruointiin.

Luku 2

Nykykäsitys kosmologiasta

Jotta käsitys kosmisen taustasäteilyn tärkeydestä käy selväksi, kerrotaan tässä luvussa aluksi merkittävimmistä kosmologisista havainnoista ja niiden taustalla olevista kosmologian teorioista.

2.1 Merkittävimpiä kosmologisia havaintoja

Olbersin paradoksi: Saksalaisen tähtitieteilijän, Heinrich Olbersin, mukaan nimetty paradoksi esittää yksinkertaisen kysymyksen kosmologisesta havainnosta: miksi yötaivas on pimeä? Yötaivaan pimeys on ehkä yksi kosmologian vanhimmista havainnoista, sillä jo Johannes Keplerin tiedetään vuonna 1610 käyttäneen sitä todisteena maailmankaikkeuden äärellisyydestä.

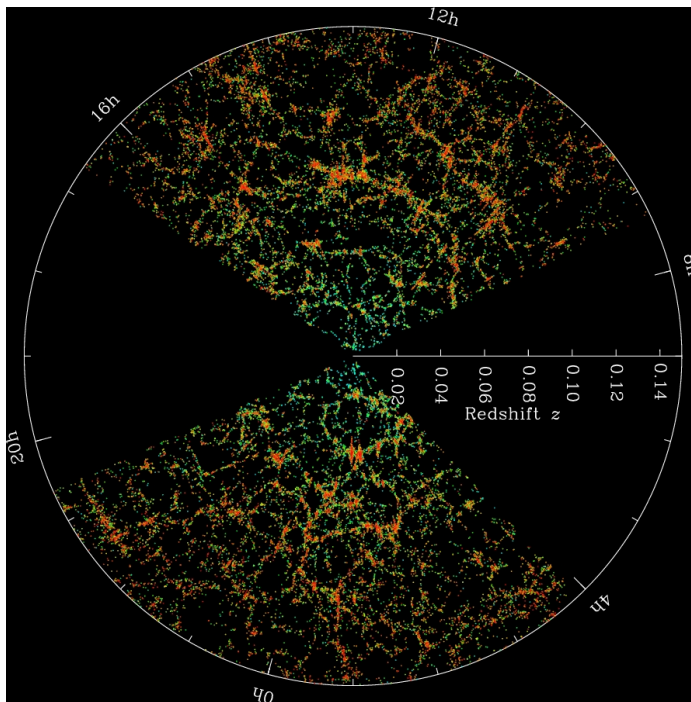
Paradoksi syntyy, jos maailmankaikkeuden oletetaan olevan äärettömän suuri ja tähtien jakautuneen siinä keskimäärin tasaisesti. Tällöin katsottaessa mielivaltaiseen yötaivaan suuntaan, tulisi näkösäteen jossain vaiheessa leikata jonkin kaukaisen tähden pinta. Koska tähden pintakirkkaus ei riipu etäisyydestä, pitäisi yötaivaan loistaa yhtä kirkkaana kuin Auringon pinta. Tämä ei kuitenkaan päde, jolloin syntyy paradoksi. Sopiva kaksiulotteinen analogia Olbersin paradoksille on keskellä tiheää metsää mielivaltaiseen ilmansuuntaan katsova havaitsija, jonka näkösäde osuu aina puunrunkoon.

Nykyään Olbersin paradoksia ei enää pidetä ongelmana, sillä tiedetään, että tähdillä on äärellinen ikä, jolloin hyvin kaukaisten tähtien valo ei ole vielä saavuttanut meitä. Olbersin paradoksi on siis muuttunut Keplerin maailmankaikkeuden äärellisen koon todistuksesta maailmankaikkeuden äärellisen iän todisteeksi, mikä ei riipu tähtien jakaumasta eikä siitä, onko maailmankaikkeus äärellinen vai ääretön.

Galaksijakauman homogeenisuus ja isotrooppisuus: Yksi tärkeimmistä nykyisin toimivista galaksien kartoitusprojekteista on Sloan Digital Sky Survey (SDSS), joka on jo kartoittanut 14,555 neliöastetta eli hieman yli 35% koko taivaasta. Kuvassa 2.1 on esitetty SDSS:n galaksijakaumakartta galaksien erilaisille punasiirtymille. Nämä SDSS:n galaksihavainnot viittaavat siihen, että galaksien ja galaksijoukkojen liikkeet ja jakaumat ovat suuressa skaalassa tilastollisesti samanlaisia kuin paikallisesti.

Galaksit ovat siis jakautuneet keskimäärin katselusuunnasta riippumattomasti, *homogeenisesti*, ja havaitsijan sijainnista riippumattomasti, *isotrooppisesti*. Kosmologian kannalta tämä on merkittävä tulos, sillä moderni kosmologia nojaa *kosmologiseen periaatteeseen*, jonka mukaan, lukuun

ottamatta paikallisia epäsäännöllisyyksiä, maailmankaikkeus näyttää samanlaiselta katsottiinpa sitä mistä pisteestä tahansa.



Kuva 2.1: SDSS:n kaksikulotteinen galaksijakaumakartta, jossa Maapallo on ympyrän keskellä. Viipaleissa näkyvät pisteet edustavat yksittäisiä galakseja. Kartassa näkyvät tyhjät sektorit ovat kartoittamatonta aluetta, koska näillä osin Linnunradan pöly estää näkyvyyden kyseisillä suunnilla sijaitseviin kaukaihin galakseihin. Ympyrän läpimitta on kaksi miljardia valovuotta. Lähde: SDSS.

Hubblen laki: Vuonna 1929 Edwin Hubble vahvisti havainnon, jonka mukaan kaukaiset galaksikohteiden (etäisyys ~ 10 megaparsekia tai yli) sähkömagneettiset spektrit ovat Dopplersiirtyneet kohti spektrin punaista päätä [5]. Punasiirtymän $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ avulla Hubblen laki voidaan ilmaista muodossa

$$z = \frac{H_0}{c} r, \quad (2.1)$$

missä H_0 on *Hubblen vakio*, c valonnopeus ja r on galaksin etäisyys havaitsijasta. Pienillä galaksin loittonemisnopeuksilla ($v \ll c$) voidaan punasiirtymälle approksimoida $z = v/c$, jolloin Hubblen laki saa tunnetumman muodon

$$v = H_0 r. \quad (2.2)$$

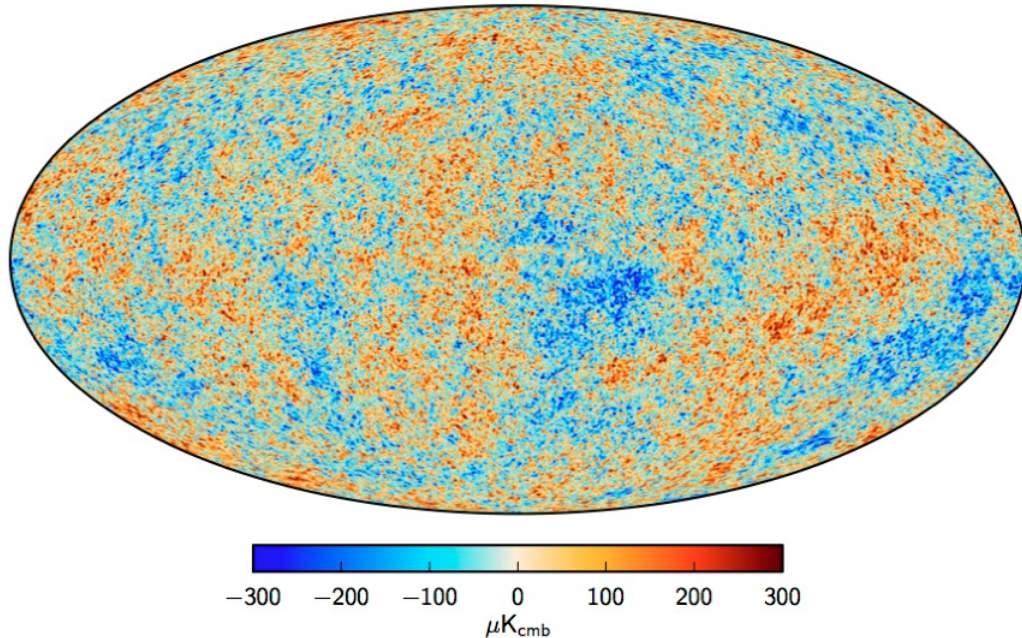
Edellä kerrotun kosmologisen periaatteen ja yleisen suhteellisuusteorian mukaan kaava (2.2) tulkitaan nykyisin kuvaamaan avaruuden laajenemista, sen sijaan, että se kuvaisi vanhentuneen geosentrisen maailmankuvan mukaisesti meidän olevan, jostain kummallisesta syystä, maailmankaikkeuden keskipisteessä, josta jokainen galaksi loittonisi.

Kosminen mikroaaltotaustasäteily: Johdannossa esiteltiin jo hieman kosmista mikroaaltotaustasäteilyä, mutta sen ollessa kosmologian kannalta kenties merkittävin havaintoaineisto, kerrotaan tässä taustasäteilystä hieman enemmän.

Kosminen mikroaaltotaustasäteily on pieniä, noin 10^{-4} K suuruisia lämpötilavaihteluita lukuun ottamatta suurella tarkkuudella homogeenista ja isotrooppista. Nämä pienet lämpötilavaihtelut ovat kuitenkin erittäin oleellisia, sillä ne tarjoavat tärkeää tietoa nykyisin havaittavien galaksien synnystä sekä maailmankaikkeuden laajenemishistoriasta ja energiasisällöstä. Tämän vuoksi on tärkeää tehdä havaintoja juuri taustasäteilyn lämpötilavaihteluista.

Kuvassa 2.2 näkyy tuorein (vuoden 2015) kosmisen taustasäteilyn lämpötilavaihteluiden kartta. Kartan keskimääräistä kylmemmät seudut (sinisellä) ja keskimääräistä kuumemmat seudut (punaisella) korreloivat materian tiheyden kanssa. Suurilla rakenneskaaloilla fotonit karkasivat tiheimmiltä seuduilta, eli poistuivat suuremmasta potentiaaliukuopasta ja menettivät samalla enemmän energiastaan suhteessa harvemmalta seudulta lähteneisiin fotoneihin. Niinpä suuret kylmät seudut kartassa vastaavat tiheitä alueita, ja suuret lämpimät seudut harvoja. Pienillä rakenneskaaloilla tilanne on päinvastainen. Materian tiheydet kehittyivät painovoiman vaikutuksesta siten, että keskimääräistä tiheimmät seudut keräsivät, suuremman gravitaatiopotentiaalinsa ansiosta, ympäriltään materiaa, ja vastaavasti harvemmat seudut menettivät tiheimmille seuduille sitä. Niinpä alueita, joilla havaitaan keskimääräistä suurempi materiatiheys pidetään nykyisin havaittavien galaksien syntysijoina.

Taustasäteilyn syntyhetkeä kutsutaan viimeiseksi sironnaksi ja pallopintaa, mistä säteilyn havaitaan saapuvan, viimeisen sironnan pinnaksi. Havaittaja on tämän pallopinnan keskellä ja tämä pinta etääntyy havaitsijasta sekä avaruudellisesti että ajallisesti. Taustasäteilyn teoreettisempiin yksityiskohtiin mennään vielä tarkemmin luvussa 2.5, missä käsitellään taustasäteilyn epäisotropian statistiikkaa, niistä saataavia kulmatehospektrejä ja puolestaan kulmatehospektreistä saatavia maailmankaikkeuden kehitystä ja rakennetta kuvaavia kosmologisia parametreja.



Kuva 2.2: Tuorein, vuoden 2015 Planckin ja WMAPin yhteistyönä tehty kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilan epäisotropiakartta $5'$ kulmaresoluutiolla. Lähde [6].

Heliumin runsaus maailmankaikkeudessa: Validin kosmologisen mallin tulisi antaa selitys myös alkuaineiden synnylle ja runsauksille. Vanhimpia tähtiä ja tähtienvälistä kaasun HII alueita havaitessa heliumin, vedyn jälkeen toiseksi yleisimmän alkuaineen, massaosuudeksi on saatu noin 25%. Kosmologisen standardimallin, Λ CDM mallin, mukaan maailmankaikkeuden synnyn ensimmäisen tunnin aikana vallitsi nukleosynteesiksi kutsuttu prosessi. Nukleosynteesiä kuvaavasta teoriasta saatavat ennusteet sopivat erittäin hyvin yhteen havaitun heliumin massaosuuden kanssa. Nukleosynteesiteorian sopivuus tähtitieteellisiin havaintoihin onkin yksi kosmologisen standardimallin kulmakivistä.

2.2 Aika-avaruuden geometria

Yleisen suhteellisuusteorian mukaan elämme neliulotteisessa aika-avaruudessa. Sen geometrian määrää maailmankaikkeuden sisältämä energiatiheys, ja metriset komponentit $g_{\mu\nu}$ kuvaavat geometrian. Tässä tutkielmassa metristen komponenttien signatuurinotaatioksi on valittu $(-, +, +, +)$. Kosmologeille vakiintuneen käytännön mukaisesti tässä tutkielmassa käytetään lisäksi luonnollisia yksiköitä, ellei toisin mainita. Niinpä tästä eteenpäin $\hbar = c = k_B \equiv 1$.

Kosmologisen periaatteen mukaan maailmankaikkeus on suuressa skaalassa (noin 100 Mpc:n ja tätä suuremmilla etäisyyksillä) avaruudellisesti homogeeninen (translaatiosymmetrinen) ja isotrooppinen (rotaatiosymmetrinen), mutta kehittyy ajan myötä. Yleisen suhteellisuusteorian avulla ilmaistuna tämä tarkoittaa sitä, että aika-avaruus voidaan jakaa äärettömäksi määräksi kolmiulotteisia avaruudenkaltaisia siivuja eli jokaiselle ajan vakioarvolle t , jota kutsutaan myös *kosmiseksi ajaksi*, on olemassa oma kolmiulotteinen aliavaruus, joka on homogeeninen ja isotrooppinen. Homogeenisen ja isotrooppisen aika-avaruuden metriikka tunnetaan *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW) metriikkana [7–11], jonka viivalementti ds^2 voidaan pallokoordinaatistossa (r, Ω) kirjoittaa muotoon:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.3)$$

Kaavassa (2.3) on käytetty Einsteinin summausnotaatiota summasten aina vastaavien ylä- ja alaindeksien yli. Tässä $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, vakioparametri K kuvaa avaruuden kaarevuutta ja $a(t)$ on ajasta riippuva *skaalatekijä*, joka kertoo miten maailmankaikkeus laajenee (tai kutistuu) ajan funktiona. Skaalatekijän arvolle nykyhetkellä t_0 on vakiintunut käytäntö käyttää normitusta $a(t_0) \equiv a_0 = 1$. Kaavan (2.3) koordinaatit ovat mukana laajenevia koordinaatteja (engl. comoving coordinates) eli koordinaattijärjestelmä kulkee avaruuden laajenemisen mukana siten, että kappaleiden avaruuskoordinaatit pysyvät vakiona avaruuden laajentuessa. Koska kohteiden väliset fysikaaliset etäisyydet kuitenkin kasvavat laajenemisen myötä, on kätevää määritellä *mukana laajeneva etäisyys* jakamalla fysikaalinen etäisyys skaalatekijällä $a(t)$. Tällöin kahden mukana laajenevassa koordinaatistossa olevan kohteen mukana laajeneva etäisyys säilyy vakiona.

Hubblen parametri (eli yleistys kaavasta (2.2) jokaiselle ajanhetkelle) voidaan nyt skaalatekijän avulla kirjoittaa muotoon

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.4)$$

missä $\dot{a}(t)$ on skaalaustekijän aikaderivaatta koordinaattiajan suhteen. Hubblen parametrin $H(t)$ nykyarvo on siten Hubblen vakio H_0 , jonka tuoreimmaksi arvoksi on mitattu $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [12].

Kosmologiassa usein koordinaattiaikaa t hyödyllisempi suure on konformiaika τ ¹, sillä tällöin kaavan (2.3) avaruuden osan lisäksi myös ajan osa skaalautuu maailmankaikkeuden laajenemisen mukana. Konformiaika riippuu koordinaattiajasta seuraavasti:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.5)$$

Havainnot maailmankaikkeuden kaarevuudesta viittaavat siihen, että maailmankaikkeus on spatiaalisesti laakea ($K = 0$) [6]. Laakealle maailmankaikkeudelle voidaan kaava (2.3) kirjoittaa uudestaan karteesisissa, mukana laajenevissa koordinaateissa yksinkertaiseen muotoon

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (2.6)$$

tai konformiajan avulla

$$ds^2 = a(\tau)^2[-d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (2.7)$$

FLRW-metriikka on määritelty mielivaltaisen skaalatekijän $a(t)$ käyttäytymiselle, joten seuraavaksi tulisi yhdistää tämä Einsteinin yhtälöihin ja johtaa näistä tunnetut Friedmannin yhtälöt. Nämä yhtälöt kytkevät skaalatekijän isotrooppisen ja homogeenisen aika-avaruuden energiamäärään.

2.3 Friedmannin yhtälöt

Yleisessä suhteellisuusteoriassa maailmankaikkeuden kehitys määräytyy kymmenen Einsteinin kenttäyhtälön kautta, jotka voidaan kirjoittaa kompaktisti tensoriyhtälönä

$$G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu, \quad (2.8)$$

missä G^μ_ν on Einsteinin tensori, G yleinen gravitaatiovakio ja T^μ_ν on energia-liikemäärätensori (myös energia-impulssitensori). Einsteinin tensori riippuu metriikan komponenteista $g_{\mu\nu}$ ja sen koordinaattien x^μ suhteen lasketuista ensimmäisistä ja toisista osittaisderivaatoista. Symmetrinen energia-liikemäärätensori T^μ_ν on kuvaus avaruusajan materia- ja energiasisällöstä. Avaruusajan isotrooppisuudesta seuraa, että energia-liikemäärätensori on oltava ideaalifluidin muodossa

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (2.9)$$

missä ρ on energiatiheys fluidin lepokoordinaatistossa ja p on fluidin paine. Maailmankaikkeuden homogeenisuus viittaa nyt siihen, että ideaalifluidin energiatiheys ja paine eivät ole paikan funktioita, vaan ainoastaan ajan, eli $\rho = \rho(t)$ ja $p = p(t)$. Ottamalla kovarianttiderivaatta Einsteinin yhtälön vasemmalta puolelta, seuraa Bianchin identiteetin kautta $G^\mu_{\nu;\mu} = 0$, ($;$ on kovarianttiderivaatta x^μ :n suhteen), jolloin puolestaan Einsteinin yhtälöstä seuraa *energia-liikemäärän jatkuvuusyhtälö*:

$$T^\mu_{\nu;\mu} = 0. \quad (2.10)$$

¹Luvussa 2.6 esitellään optinen syvyys τ konformiajan funktiona. Tästä syystä konformiaika on kyseisessä luvussa merkitty η :lla.

Yhtälö (2.10) on yleistys (lokaaleista) energian ja liikemäärän säilymislaeista kaarevaan aika-avaruuteen. Kirjoittamalla tämä yhtälö auki FLRW-metriikassa, saamme [13]

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.11)$$

tai konformiajalle ilmaistuna τ

$$\rho' = -3(\rho + p)\frac{a'}{a}, \quad (2.12)$$

missä $\prime \equiv \frac{d}{d\tau}$. Siinä missä yhtälö (2.11) voidaan esittää Hubblen parametrin $H = \frac{\dot{a}}{a}$ avulla, voidaan vastaavasti yhtälölle (2.12) määrittää *mukana laajeneva Hubblen parametri* $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$. Mukana laajenevan Hubblen parametrin ja tavallisen Hubblen parametrin välinen yhteys on $\mathcal{H} = aH$. Yhtälö (2.11) (tai (2.12)) kertoo miten materian ja säteilyn energiatiheys kehittyy maailmankaikkeuden laajenemisen mukana, ja joskus tätä yhtälöä kutsutaan yhdeksi Friedmannin yhtälöistä.

Yhtälö (2.8) kytkee siis yhteen maailmankaikkeuden geometrian ja sen sisältämän materian ja energian. Koska Einsteinin yhtälö on epälineaarinen kymmenen osittaisdifferentiaalisen yhtälön systeemi, on sen yleinen ratkaisu äärimmäisen vaikea. Kuitenkin FLRW-metriikalle Einsteinin yleiset kenttäyhtälöt redusoituvat kymmenen sijaan kahdeksi tavalliseksi epälineaariseksi differentiaaliyhtälöksi, jotka tunnetaan paremmin *Friedmannin yhtälöinä*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.14)$$

Yhtälö (2.11) voidaan johtaa näistä kahdesta yhtälöstä. Jos tiedämme, miten energiatiheys ρ käyttäytyy skaalatekijän a funktiona, tarvitsemme itse asiassa vain yhtälöä (2.13) selvittämään miten skaalatekijä tulee käyttäytymään ajan funktiona. Seuraavaksi selvitetään, miten saadaan yhteys energiatiheden ja skaalatekijän välille.

Maailmankaikkeuden energiasisältöä voidaan karakterisoida *tilanyhtälöparametrilla*

$$w = \frac{p}{\rho}, \quad (2.15)$$

joka kytkee yhteen fluidin paineen ja energiatiheden. Sijoittamalla tilanyhtälöparametri energia-liikemäärän jatkuvuusyhtälöön (2.11) ja integroimalla tämä, saadaan energiatihedelle ρ ja skaalatekijälle a yksinkertainen yhteys

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.16)$$

Riippuen vain tilanyhtälöparametrin w arvosta, voimme jakaa maailmankaikkeuden energiasisällön kolmeen eri komponenttiin:

- epärelativistinen materiaan (kuten tähtiin, galakseihin, tähtienväliseen aineeseen ja pimeään aineeseen), jolle $p_m = 0 \Rightarrow w_m = 0$ ja $\rho_m \propto a^{-3}$,
- säteilyyn (kuten fotoneihin ja relativistisiin neutriinoihin), jolle $p_r = \frac{\rho_r}{3} \Rightarrow w_r = \frac{1}{3}$ ja $\rho_r \propto a^{-4}$, ja

- tyhjiön energiaan (erikoistapaus pimeästä energiasta), jolle $p_\Lambda = -\rho_\Lambda = \text{vakio} \Rightarrow w_\Lambda = -1$.

Epärelativistisen materian aikakehitys voidaan yksinkertaisesti tulkita vain hiukkasten lukumäärätiheyden vähenemisenä maailmankaikkeuden kasvaessa, koska materian massatiheyden väheneminen on suoraan verrannollinen maailmankaikkeuden tilavuuden kasvuun. Säteilyn käytös putoaa materian käytöstä hieman nopeammin, koska vaikka fotonien lukumäärätiheys putoaa yhtä nopeasti kuin materian, menettävät yksittäiset fotonit matkatessaan avaruuden halki energiataan verrannollisena tekijään a^{-1} johtuen niiden punasiirtymästä. Koska maailmankaikkeuden on todettu muun muassa Tyypin Ia supernovahavaintojen kautta laajenevan [14–16] kiihtyvästi, tarvitaan energiakomponentti, jolla on negatiivinen paine, aiheuttamaan tämä kiihtyminen. Tällaista energiaa kutsutaan pimeäksi energiaksi ja toistaiseksi yksinkertaisin dataan sopiva malli pimeälle energialle on sellainen, jolle $\rho_\Lambda = -p = \text{vakio}$. Tällaista pimeän energian muotoa kutsutaan myös tyhjiön energiaksi.

Koska näiden kolmen komponentin energiatiheyksien kehitykset käyttäytyvät eri tavalla skaalatekijän funktiona, ovat eri energian komponentit dominoineet maailmankaikkeuden kokonaisenergiatiheyttä eri aikoina. Säteilyn energiatiheys kasvaa nopeimmin mentäessä ajassa taaksepäin, jolloin kaikkeen alussa on ollut säteilyn dominoima ajanjakso, joka alkoi alkuräjähdyksestä ja päättyi kun maailmankaikkeuden ikä oli noin 60 000 – 70 000 vuotta (punasiirtymä luokkaa $z \sim 3300$). Seuraavaksi nopeiden energiatiheys kasvaa tavallisella epärelativistisella materiaalilla, joten säteilyn dominoimaa ajanjaksoa seurasi materian dominoima ajanjakso, joka päättyi, kun maailmankaikkeuden ikä oli noin 9.8 miljardia vuotta. Koska maailmankaikkeuden laajetessa nämä kaksi energialajia ovat alati laskeneet ja pimeän energian energiatiheys on pysynyt vakiona, dominoi pimeän energian energiatiheys pitkässä aikaskaalassa. Nykytiedon mukaan elämme tällä hetkellä pimeän energian dominoimassa maailmankaikkeudessa.

Yleensä energiatiheydet on tapana esittää suhteina *kriittiseen tiheyteen*, joka saadaan Friedmannin yhtälöstä (kaava (2.13)) asettamalla $K = 0$ ja sijoittamalla yhtälöön $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Tästä seuraa määritelmä

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.17)$$

joka on se energiatiheys, mikä esittää laakean, nopeudella H laajenevan, isotrooppisen ja homogeenisen maailmankaikkeuden energiatiheyttä. Tällöin kokonaisenergiatiheys, joka on summa kaikkien energiakomponenttien energiatiheyksistä, voidaan esittää laakealle avaruudelle yksinkertaisessa muodossa

$$\Omega_{tot}(t) = \Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1, \quad (2.18)$$

missä $\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$. Kosmologisten havaintojen mukaan kaavan (2.18) parametrien nykyarvot ovat suuruusluokkaa $\Omega_{r0} \sim 10^{-4}$, $\Omega_{m0} \sim 0.3$ ja $\Omega_{\Lambda0} \sim 0.7$, missä alaindeksi 0 viittaa nykypäivän arvoihin.

2.4 Kosminen inflaatio

Kosmologiassa inflaatio määritellään maailmankaikkeuden kiihtyvän laajenemisen ($\ddot{a} > 0$) ajanjaksona erittäin varhaisessa maailmankaikkeudessa, ei nykypäivänä havaittavan maailmankaik-

keuden kiihtyvänä laajenemisena. Tuona ajanjaksona maailmankaikkeuden tilavuuden oletetaan laajenneen vähintään tekijällä 10^{78} . Ensimmäiset teorit kiihtyvistä maailmankaikkeudesta loivat A. Starobinsky vuosina 1979-80 [17, 18] ja A. Guth vuonna 1981 [19].

Vaikka inflaatiota ei olla vielä pystytty osoittamaan aukottomasti tapahtuneeksi, on inflaatio erittäin tasokas hypoteesi selittämään sellaisia FLRW-mallin ongelmia ja kosmologisia havaintoja, joita ilman inflaatiota, tai sen kaltaista tapahtumaa, olisi erittäin vaikea kuvailla. Näitä ongelmia ovat *laakeuden ongelma*, *horisonttiongelma* ja *magneettisten monopolien ongelma*. Vuonna 1981 A. Guth pyrki ratkaisemaan horisontti- ja laakeusongelman [19]. Vuonna 1983 A. Linde ehdotti inflaatiomalliksi niin kutsuttua kaoottista inflaatiota, joka ei aiempien mallien sijaan oletta- nut inflaation alkuehdoksi termistä tasapainoa [20]. Nykyään kaoottista inflaatiota pidetään usei- den inflaatiomallien prototyypinä. Kuvaillaan seuraavaksi, miten inflaatio poistaa edellä esitetyt FLRW-mallin ongelmat.

2.4.1 Laakeusongelma

Kirjoittamalla Friedmannin yhtälö (2.13) kokonaisenergiatiheyden $\Omega_{tot}(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2}$ avulla ja ottamalla tästä puolittain itseisarvot, saadaan

$$|\Omega_{tot}(t) - 1| = |K| \left(\frac{1}{a(t)H(t)} \right)^2. \quad (2.19)$$

Lähes laakean maailmankaikkeuden tapauksessa tämä yhtälö kuvaa miten kokonaisenergiatihey- den mahdollinen poikkeama tasan ykkösestä vaikuttaa poikkeaman suuruuteen (tai pienuuteen) jonain toisena aikana. Yhtälön (2.19) mukaan, jos Ω_{tot} on täsmälleen yksi (eli avaruuden kaare- vuus $K = 0$) jonain ajan hetkenä, on se sitä aina. Jos kokonaisenergiatiheys poikkeaa milloinkaan ykkösestä, kehittyy se ajan mukana etääntyen yhä kauemmaksi kriittisestä tiheydestä. Tämä näh- dään seuraavasti: Tarkastellaan lähes laakeaa ($|K| \sim 0$), omamme kaltaista maailmankaikkeutta, jossa on vallinnut säteilyn dominoima aikakausi (jolloin $1/a^2 H^2 \propto t^{2/3}$) ja materian dominoima aikakausi (jolloin $1/a^2 H^2 \propto t^{2/3}$). Kaavasta (2.19) seuraa, että säteilyn dominoimalle aikakau- delle pätee $|\Omega_{tot}(t) - 1| \propto t$ ja materian dominoimalle aikakaudelle pätee $|\Omega_{tot}(t) - 1| \propto t^{2/3}$, joten pienikin $\Omega_{tot}(t)$:n poikkeama ykkösestä kasvattaa poikkeamaa myöhempänä ajan hetkenä (tai päinvastoin poikkeama ykkösestä pienenee mentäessä ajassa taaksepäin). Olettamalla yksin- kertaisuuden vuoksi, että tällaisessa maailmankaikkeudessa olisi aina ollut vain säteilyä, voimme arvioida miten pieniä poikkeamien olisi täytynyt olla varhaisemmassa maailmankaikkeudessa, kun poikkeama tätä nykyä ($t_0 \simeq 10^{17}$ s) on suuruusluokkaa $|\Omega_{tot}(t_0) - 1| \lesssim 10^{-2}$.

- Ajanhetkellä, kun materia ja säteily olivat tasapainossa ($t_{eq} \simeq 10^{10}$ sekuntia alkuräjähdyk- sestä) olisi täytynyt olla $|\Omega_{tot}(t_{eq}) - 1| \lesssim 10^{-5}$.
- Alkuräjähdyksen ydinsynteesissä² ($t_{BBN} \simeq 1$ sekuntia alkuräjähdyksestä) olisi täytynyt olla $|\Omega_{tot}(t_{BBN}) - 1| \lesssim 10^{-15}$.

²(engl. Big Bang nucleosynthesis, BBN) oli varhaisen maailmankaikkeuden tapahtuma, jossa ensimmäisen tunnin aikana muodostuivat ensimmäiset atomiytimet ^2H , ^3He , ^4He , ^7Li . Tämä ajanjakso sijoittuu arviolta skaalalle $t \sim 0.01$ sekunnista muutamaan tuntiin ($T \sim 10$ MeV ... $T \sim 10$ keV.)

- Lähempänä ajan nollahetkeä $t = 0$ (tarkemmin ilmaistuna Planckin ajalle $t \sim 10^{-43}\text{s}$), missä vielä ollaan klassisen yleisen suhteellisuusteorian pätevyysalueen rajoilla, olisi täytynyt olla $|\Omega_{tot}(t) - 1| \lesssim 10^{-58}$.

Ongelma syntyy, koska ei ole kovin todennäköistä, että tämän kaltainen Ω_{tot} :n hienosäätö voisi tapahtua sattumalta. On toki mahdollista, että maailmankaikkeus olisi ollutkin alusta alkaen täysin laakea, mutta tämä on erityistapaus, joka vaatii selityksen.

Laakeusongelman ratkaisu inflaatiolla: Inflaation avulla laakeusongelma katoaa. Laakeusongelmassa $|\Omega_{tot} - 1| = |K|/(aH)^2 = |K|/\dot{a}^2$ kasvaa ajan funktiona, koska \dot{a} pienenee, eli maailmankaikkeus hidastuu. Jos sen sijaan oletetaan, että maailmankaikkeus kiihtyykin ($\ddot{a} > 0$), niin tällöin laajenevassa maailmankaikkeudessa lähes mielivaltainen Ω_{tot} lähestyy ykköstä ajan funktiona. Inflaation ehto ajaa siten Ω_{tot} :n lähelle ykköstä, eikä siitä pois päin, kuten alkuperäinen kuuma alkuräjähdysteoria esitti.

2.4.2 Horisonttiongelmia

Horisonttiongelmia liittyy kosmisen taustasäteilyn kausaalisesti kytkettyjen alueiden koon kehitykseen – miten täysin eri puolella taivasta olevat alueet voivat olla keskenään termisessä tasapainossa, kun nämä alueet eivät ole tavallisen kuumen alkuräjähdysteorian mukaan ole voineet olla vielä vuorovaikutuksessa keskenään. Lasketaan esimerkin vuoksi approksimaatio sille, minkä suuruusluokan rakenteet ovat voineet vuorovaikuttaa keskenään rekombinaation aikana (taustasäteilyn syntyhetkellä), jolloin punasiirtymä oli $z \sim 1100$, kun inflaatiota ei huomioida. Tätä varten määrittelemme ensin hiukkashorisontin.

Hiukkashorisontti: Valonnopeuden äärellisyys ja maailmankaikkeuden rajallinen ikä asettavat rajan (horisontin) havaittavalle maailmankaikkeudelle. Valo on matkannut äärellisen etäisyyden siitä hetkestä, jolloin se ensimmäistä kertaa irtikytkeytyi aineesta, ja toisaalta avaruuden laajeneminen on venyttänyt havaittavan maailmankaikkeuden etäisyyksiä. Lisäksi maailmankaikkeuden energiatiheys ja koostumus ovat vaikuttaneet laajenemiseen, jolloin horisontin määrittäminen vaatii yleistä suhteellisuusteoriaa. Lähtemällä liikkeelle FLRW-metriikasta ja ehdosta, että valo etenee pitkin geodeesia ($ds^2 = 0$), saadaan lyhyellä laskulla mukana laajeneva etäisyys d_0^c , jonka valo on kulkenut punasiirtymästä z nykypäivään ($t_0 = 1, z = 0$)

$$d_0^c(z) = H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} x^4 + (1 - \Omega_0) x^2 + \Omega_{m0} x + \Omega_{r0}}}, \quad (2.20)$$

missä $x = a(t)/a_0 = (1 + z)^{-1}$ ja $\Omega_0 = \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{r0} + \Omega_{m0}$. Maailmankaikkeuden syntyhetkestä ($t = 0, a(0) = 0, z = \infty$) nykyhetkeen saamme mukana laajenevalle etäisyydelle

$$d_{\text{hor}}^c(z) = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} x^4 + (1 - \Omega_0) x^2 + \Omega_{m0} x + \Omega_{r0}}}, \quad (2.21)$$

joka on maksimaalin etäisyys, jonka sisällä informaation vaihtoa (kausaalista kytkentää alueiden välillä) on voinut tapahtua. Tätä etäisyyttä kutsutaan *hiukkashorisontiksi*. Säteilyn dominoimassa ja laakeassa maailmankaikkeudessa hiukkashorisontin koko kaavan (2.21) mukaan on

$d_{\text{hor}}^c = (aH)^{-1} = \mathcal{H}^{-1}$. Vastaavasti materian dominoimalle ja laakealle maailmankaikkeudelle saadaan mukana laajenevan hiukkashorisontin suuruudeksi $d_{\text{hor}}^c = 2(aH)^{-1} = 2\mathcal{H}^{-1}$. Niinpä maailmankaikkeudessamme hiukkashorisontin suuruusluokka on ollut suurimman osan ajasta lähellä mukana laajenevaa Hubblen pituutta $d_{\text{hor}}^c \sim l_H^c \equiv \mathcal{H}^{-1}$.

Mukana laajeneva Hubblen pituus l_H^c kasvaa säteilyn tai materian dominoimassa maailmankaikkeudessa, sillä tällöin $p, \rho > 0$, jolloin Friedmannin toisen yhtälön (2.14) mukaan $\ddot{a} < 0$, eli \dot{a} putoaa ajan funktiona ja $\mathcal{H}^{-1} = \dot{a}^{-1}$. Toisin sanoen maailmankaikkeuden ikääntyessä yhä kaukaisemmat alueet saavuttavat siten kausaalisen kytkennän.

Kausaalisesti kytkettyjen alueiden suuruusluokka: Ajatellaan ftonia liikkumassa radiaalisesti laakeassa avaruudessa (yleistys kaarevaan avaruuteen on suoraviivaista). Kuten jo aiemmin todettiin, fotonit kulkevat pitkin geodeesia ($ds^2 = -dt^2 + a^2 dr^2 = 0$), joten mukana laajenevissa koordinaateissa ftoni ehtii kulkea matkan d_0^c kahden ajanhetken t_1 ja t_2 välillä

$$d_0^c \equiv r_1 - r_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.22)$$

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että olemme laakeassa, materian dominoimassa maailmankaikkeudessa. Tällöin skaalatekijälle pätee $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, kun $a_0 = 1$, jolloin Hubblen parametri on $H = (2/3)t^{-1} = a^{-3/2}H_0$. Kaavasta (2.22) seuraa, että materian dominoiman maailmankaikkeuden mukana laajeneva etäisyys on

$$d_0^c = 2H_0^{-1}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}). \quad (2.23)$$

Mukana laajeneva hiukkashorisontin koko kiinnitetyllä skaalatekijän a arvolla on se etäisyys, jonka ftoni on matkannut alkuräjähdyksen jälkeen ($a_1 = a(0) = 0$) eli tällöin kaavasta (2.23) seuraa

$$d_{\text{hor}}^c(a) = 2H_0^{-1}\sqrt{a}. \quad (2.24)$$

Kun tarkastelemme kosmista taustasäteilyä, havaitsemme maailmankaikkeutta, kun sen skaalatekijä oli $a_{\text{CMB}} \approx 1/1100$, joten mukana laajeneva etäisyys viimeisen sironnan pinnan ja Maan pinnalla olevan havaitsijan välillä on kaavan (2.23) mukaan

$$d_0^c(a_{\text{CMB}}) = 2H_0^{-1}(1 - \sqrt{a_{\text{CMB}}}) \approx 2H_0^{-1}. \quad (2.25)$$

Kuitenkin tätä vastaava mukana laajeneva horisontti on kaavan (2.24) mukaan

$$d_{\text{hor}}^c(a_{\text{CMB}}) = 2H_0^{-1}\sqrt{a_{\text{CMB}}} \approx 2H_0^{-1}\sqrt{a_{\text{CMB}}} \approx 6 \times 10^{-2}H_0^{-1}. \quad (2.26)$$

Tästä seuraa, että vain ne alueet, joiden kulmaetäisyys toisistaan on alle

$\theta \lesssim \frac{d_{\text{hor}}^c(a_{\text{CMB}})}{d_0(a_{\text{CMB}})} \approx 2^\circ$ ovat voineet kuuman alkuräjähdysteorian mukaan vuorovaikuttaa keskenään. Silti havaitsemme joka puolella taivasta lähes isotroopisen taustasäteilyn, jonka alueiden lämpötilapoikkeamat keskiarvosta ovat vain $10^{-5} \dots 10^{-4}$ K. Koska havaitsemme toisistaan hyvin etäisillä alueilla lähes samanlaisen kehityksen, muodostaa kuuma alkuräjähdysteoria horisonttiongelman.

Horisonttiongelman ratkaisu inflaatiolla: Inflaation aikana \dot{a} kasvaa ajan funktiona ($\ddot{a} = \frac{d}{dt}\dot{a} > 0$), jolloin mukana laajeneva Hubblen pituus $\mathcal{H}^{-1} = \dot{a}^{-1}$ pienenee. Tämä tarkoittaa, että

alueet, jotka ennen inflaatiota olivat kausaalisesti kytkeytyneet toisiinsa, menettävät kytken inflaation aikana. Havaitsemme siis sellaista maailmankaikkeutta, jonka alussa vallitsi erittäin nopea kiihtymisen vaihe, joka eristi kausaalisesti kytkeytyneet alueet toisistaan. Emme itse asiassa edes havaitse kaikkia inflaation venyttämiä alueita, vaan viimeisen sironnan pinta asettaa alarajan inflaation kestolle.

2.4.3 Magneettisten monopolien ongelma

Maailmankaikkeuden alun erittäin kuumissa olosuhteissa suuret yhtenäisteoriat ennustavat erittäin massiivisten magneettisten monopolien tuotannon [21, 22], mutta silti emme havaitse tällaisia nykyisessä maailmankaikkeudessamme. Inflaatio antaa myös tälle monopolien ongelmalle järkevän selityksen. Mikäli inflaatio alkoi magneettisten monopolien tuotannon aikana, tai sen jälkeen, maailmankaikkeuden valtava laajeneminen inflaation seurauksena kutisti monopolien energiatihedyyden äärimmäisen pieneksi.

2.4.4 Yhden kentän slow-roll inflatoni ja sen häiriöt

Tarkastellaan seuraavaksi, miten maailmankaikkeuden pienet epähomogeenisuudet voivat ohjata inflaation fysiikkaa. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan tarkastelemaan vain yksittäistä skalaarikentän mallia, vaikka inflaatio voidaankin saavuttaa myös toisenlaisillakin malleilla. Tämä yksinkertainen malli on kuitenkin edelleen hyvin havaintoihin yhteensopiva [23].

Koska inflaatioehto vaatii kiihtyvän alkumaailmankaikkeuden ($\ddot{a} > 0$), niin yhtälöstä (2.14) seuraa, että inflaatio on mahdollinen vain, kun $p < -\frac{1}{3}\rho$ eli paineen tulee olla negatiivinen. Mikä tahansa komponentti, jolla siten on negatiivinen paine, ja joka dominoi maailmankaikkeuden energiatihedyyttä voi toimia inflaation käynnistäjänä. Tämä poissulkee tavallisesta aineesta koostuvan ideaalikaasun, jonka paine on aina positiivinen. Vastaavasti pimeä energia, jonka oletetaan aiheuttavan nykyinen maailmankaikkeuden kiihtyvä laajeneminen, on poissuljettu, sillä sen vaikutus varhaisessa maailmankaikkeudessa on häviävän pieni suhteessa muihin energiatihedyyksiin. Hiukasta täsmällisempi kuvaus varhaisen maailmankaikkeuden suurissa energiaskaaloissa on kvanttikenttä. Havaintoihin yhteensopiva ja silti kaikista yksinkertaisin tällainen kenttä on yksittäinen skalaarikenttä ϕ , jota, analogisesti hiukkasten nimeämisen kanssa, kutsutaan *inflatoniksi*. Tälle skalaarikentälle voidaan kirjoittaa Lagrangen tiheys muodossa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (2.27)$$

missä $V(\phi)$ on skalaarikentän potentiaalienergia. Kentälle saadaan liikeyhtälö Euler-Lagrangen yhtälöstä kaarevassa avaruudessa

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \quad (2.28)$$

Homogeeniselle FLRW-maailmankaikkeudelle (jolle myös skalaarikenttä on homogeeninen), saadaan kahdesta edellisestä yhtälöstä kentän liikeyhtälöksi

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (2.29)$$

missä $(')$ on derivaatta kentän ϕ suhteen. Skalaarikentän energia-liikemäärätensori $T_{\mu\nu}$ saadaan kenttää kuvaavasta Lagrangen tiheydestä

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.30)$$

Mikäli kenttä on homogeeninen, tästä saadaan ratkaisuksi

$$\begin{aligned} \rho = T_{00} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ p = \frac{1}{3}T_i^i &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nyt kaavasta (2.13) seuraa

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) = \frac{1}{3M_{Pl}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (2.32)$$

missä $M_{Pl} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$ on Planckin massa. Yhtälöistä (2.31) seuraa, että ehto inflaatiolle ($\rho + 3p < 0$) toteutuu, kun pätee

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi). \quad (2.33)$$

Yhtälö (2.33) ei ole voimassa, jos ϕ on kaukana potentiaalin $V(\phi)$ minimistä, mikä on silti kelvollinen alkuoletus inflaation käynnistymiselle. Tämä ei kuitenkaan tuota ongelmaa, sillä jos potentiaali $V(\phi)$ on tarpeeksi laakea, niin tällöin yhtälön (2.29) vaimennustermi $3H\dot{\phi}$ saa $\dot{\phi}$:n tarpeeksi pieneksi, jotta yhtälö (2.33) on voimassa, vaikka ϕ olisi ollutkin aluksi kaukana potentiaalin minimistä. Vaimennustermi $3H\dot{\phi}$ hidastaa inflatonin ϕ kehitystä, jolloin päädytään herkästi tilanteeseen, jossa pätee

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &\ll V(\phi), \\ |\ddot{\phi}| &\ll 3H|\dot{\phi}|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Näitä ehtoja kutsutaan kosmologiassa *slow-roll ehdoiksi*. Kun nämä ehdot ovat voimassa, yhtälöt (2.29) ja (2.32) yksinkertaistuvat *slow-roll yhtälöiksi*

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{V}{3M_{Pl}^2}, \\ 3H\dot{\phi} &= -V'. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Potentiaalin $V(\phi)$ muoto määrittää niin kutsutut *slow-roll parametrit*, jotka määritellään

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi) &\equiv \frac{1}{2}M_{Pl}^2\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \\ \eta(\phi) &\equiv M_{Pl}^2\frac{V''}{V}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Jotta slow-roll ehdot täyttyvät, ovat välttämättömät, mutta ei riittävät ehdot slow-roll parametreille $\epsilon \ll 1$ ja $|\eta| \ll 1$. Ehdot eivät ole riittäviä, koska ne rajoittavat vain potentiaalin muotoa ja määrittävät potentiaalista vain sellaisen kenttäalueen, jossa slow-roll approksimaatio voi toimia. Kentän kehitykseen vaikuttaa potentiaalin lisäksi sen alkuarvot ϕ , $\dot{\phi}$, koska kentän liikeyhtälö

(2.29) on toista kertalukua. Kuitenkin, koska slow-roll ratkaisu on itse asiassa attraktoriratkaisu [24], voidaan lähes mielivaltaisilla alkuarvoilla asetettu yleinen ratkaisu saada lähestymään hyvin nopeasti slow-roll ratkaisua.

Soveltamalla lineaarista häiriöteoriaa skalaarikentälle, voidaan häiriöiden kehitystä tutkia inflaation aikana. Inflatonikenttä voidaan jakaa kahtia homogeeniseen taustaosaan ja häiriöön

$$\phi(t, \vec{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \vec{x}). \quad (2.37)$$

Koska häiriöt riippuvat mitan valinnasta (siirryttäessä koordinaatistosta toiseen), on luonnollista käyttää mittainvariantteja suureita häiriöiden tarkasteluun. Yksi tällainen suure on kosmologisessa häiriöteoriassa usein käytetty *mukana laajeneva kaarevuushäiriö* \mathcal{R} . Inflaation aikana mukana laajenevan kaarevuushäiriön \mathcal{R} yhteys inflatonikentän häiriöihin voidaan esittää laakeassa mitassa [25]

$$\mathcal{R} = -H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \iff \mathcal{R}_{\vec{k}} = -H \frac{\delta\phi_{\vec{k}}}{\dot{\phi}}. \quad (2.38)$$

Edellä skalaarikenttää on käsitelty vain klassisesti, mutta todenmukaisempi kuvaus kentälle inflaation aikana tulee kvanttikenttäteoriasta. Tällöin, Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen mukaisesti, skalaarikentässä esiintyy fluktuaatioita, joiden tilastollisia ominaisuuksia voidaan karakterisoida. Mikäli suureen g fluktuaatiot ovat jakaumaltaan gaussisia, sisältää tehospektri \mathcal{P}_g kaiken tilastollisen informaation tämän suureen fluktuaatioista. Yhtälöstä (2.38) seuraa, että inflatonikentän fluktuaatioiden tehospektrille saadaan esitys

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{aH=k}, \quad (2.39)$$

missä $aH = k$ tarkoittaa hetkeä, kun tiettyä moodia k vastaava aallonpituus kasvaa Hubblen pituutta (tai mukana liikkuvaa Hubble pituutta $\mathcal{H} = k$) suuremmaksi. Tämän horisontin rajapinnan sisäpuolella häiriöt käyttäytyvät ajan funktiona ja ulkopuolella sekä rajapinnassa $aH = k$ ”jäätävät” paikalleen. Inflaation aikana kvanttifluktuaatiot synnyttävät inflatonikentän häiriöitä, jotka muutaman Hubblen ajan ($1/H$) jälkeen poistuvat horisontista eli silloin, kun skaalatekijä a on kasvanut tarpeeksi suureksi, jolloin pätee $k \ll aH$. Hubblen parametrin H kasvaminen inflaation aikana on pientä verrattuna skaalatekijään a . Vastaavasti kaarevuushäiriöiden tehospektriä saadaan [24]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \right)^2. \quad (2.40)$$

Tämä yhtälö kertoo, miten inflaation aikaiset skalaarikentän kvanttifluktuaatiot vaikuttavat kaarevuushäiriön tehospektriin, kun skalaarikentäksi oletetaan yhden kentän slow-roll inflatoni.

Sijoittamalla H toisesta slow-roll yhtälöstä (2.35) ja $\dot{\phi}$ ensimmäisestä slow-roll ehdosta (2.34) edelliseen yhtälöön, saadaan

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{1}{M_{Pl}^4} \left(\frac{V}{\epsilon} \right)_{aH=k}. \quad (2.41)$$

Slow-roll inflaation aikana potentiaali V ja sen derivaatta V' muuttuvat hitaasti, jolloin myös $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ muuttuu hitaasti k :n funktiona. Tätä hidasta muuttumista voidaan karakterisoida spektri-

indeksillä $n_s(k)$, joka määritellään kaavalla

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{d \ln k}. \quad (2.42)$$

Spektri-indeksi $n_s(k)$ on skaalasta vapaa (engl. scale-free), mikäli se on riippumaton k :sta. Primordiaaliselle tehospektrille $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ saadaan tällöin

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s - 1}, \quad (2.43)$$

missä k_p on valittu referenssiskaala (pivot skaala) ja A on tehospektrin amplitudi tällä skaalalla. Spektri-indeksin ja slow-roll parametrien välille voidaan ensimmäisessä kertaluvussa johtaa relaatio

$$n_s - 1 = -4\epsilon + 2\eta. \quad (2.44)$$

Kun slow-roll ehdot ovat voimassa ($|\eta| \ll 1$ ja $\epsilon \ll 1$), on primordiaalinen tehospektri $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ lähes skaalainvariantti. Tiivistettynä, yksinkertainen yhden kentän slow-roll inflatonimalli olettaa primordiaalisen tehospektrin olevan lähes skaalainvariantti $n_s \sim 1$. Suurten skaalojen taustasäteilyn epäisotropiamittauksilla voidaan selvittää primordiaalisen tehospektrin muoto (tästä enemmän luvussa 2.5.2). Esimerkiksi Planck mittasi spektri-indeksiksi $n_s = 0.9665 \pm 0.0062$, joten yksinkertainen yhden kentän slow-roll inflatoni on voinut toimia inflaatiofysiikan ajavana voimana.

2.5 Kosmisen taustasäteilyn epäisotropioiden statistiikka

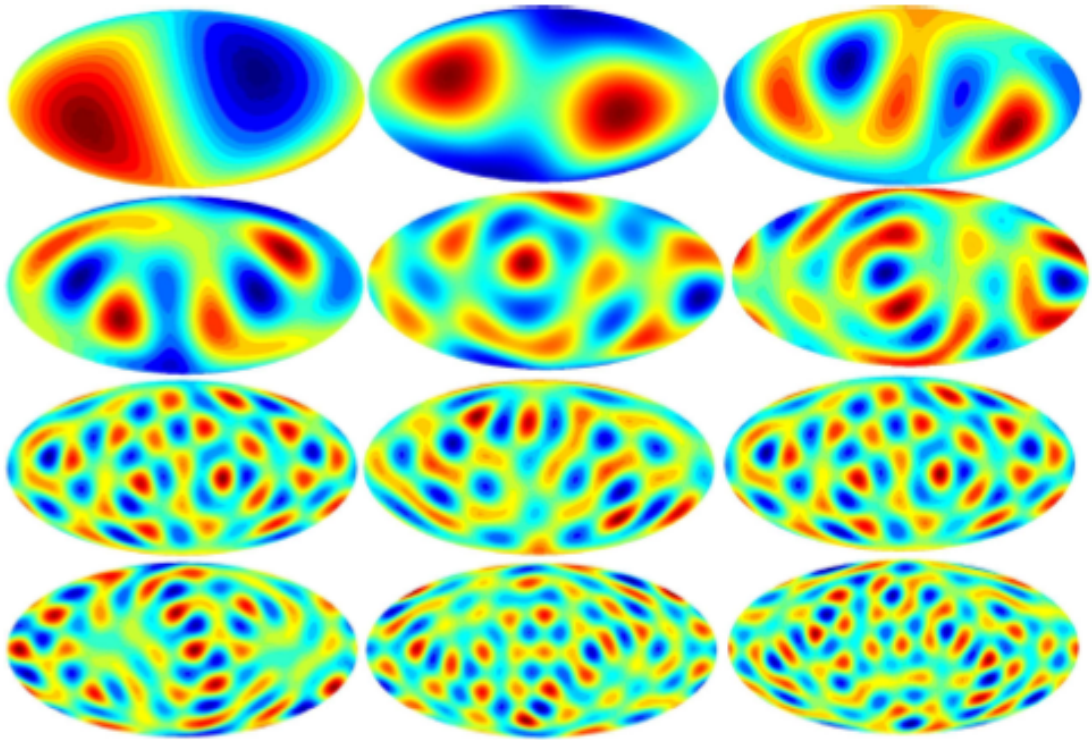
2.5.1 Multipoliekspansio

Jotta voimme mitata koko taivaanpallolla havaittavia taustasäteilyn lämpötilan muutoksia keskiarvosta T_0 , tarvitsemme lämpötilamuutoksille jonkin kahdesta pallokoordinaatiston kulmasta riippuvan funktion $\delta T(\theta, \varphi)/T_0 \equiv T(\theta, \varphi)$ kuvaamaan niitä. Kulmat θ ja φ vastaavat polaarikulmaa ja atsimuuttikulmaa ja $T(\theta, \varphi)$ sisältää kaiken informaation lämpötilamuutoksista. Koska mikä tahansa tarpeeksi säännöllinen funktio voidaan esittää yksikköpallon pinnalla *palloharmonisten funktioiden* $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ lineaarikombinaationa, voidaan taivaan lämpötilamuutokset esittää Laplacen sarjana:

$$T(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (2.45)$$

missä $a_{\ell m}$ kuvaa kompleksikertoimia. Indeksillä ℓ kuvaa oskillaatioiden määrää pallon pinnalla ja m kiinnittää näiden suunnan. Multipolin ℓ arvot kulkevat $\ell = 0, 1, 2, \dots, \infty$, ja m käy läpi arvot $m = -\ell, \dots, \ell$ eli jokaista ℓ :n arvoa vastaa $2\ell + 1$ m :n arvoa. Kuvassa 2.3 on esimerkkisimulaatio palloharmonisten funktioiden avulla tehdyistä simuloiduista kartoista multipolin ℓ arvoilla 1...12. Palloharmonisten funktioiden ominaisuuksista seuraa, että suuremmat multipolin ℓ arvot vastaavat pienempiä kulmaskaaloja θ , karkeasti ottaen relaatiolla $\theta \sim \pi/\ell$.

Analogisesti, siinä missä Fourier'n sarjan esityksessä on tavoitteena määrittää reaalikertoimet a_k ja b_k (tai kompleksikertoimet c_k), niin Laplacen sarjan esityksen tavoitteena on määrittää kompleksikertoimet $a_{\ell m}$. Syy pallon pinnalla määritellyn funktion Laplacen sarjan kertoimien määrittämiseen on, että tällöin usein numeerinen laskenta helpottuu, verrattuna alkuperäiseen sarjaan,



Kuva 2.3: Esimerkki palloharmonisten funktioiden avulla satunnaisgeneroiduista kartoista kasvavan multipolin funktiona. Vasemmalta ylhäältä luettuna $\ell = 1$ (dipoli), 2 (kvadrupoli), 3 (oktu-poli), 4,..., 12. Lähde [24].

johtuen *palloharmonisten funktioiden ortogonaalisuudesta pallon pinnan yli* [26]. Kosmologiassa taustasäteilysignaalia – lämpötilavaihteluita ja polarisaatiota – analysoidaan multipoliekspansiol-la. Yhtälöstä (2.45) voidaan kääntäen laskea $a_{\ell m}$ -kertoimet seuraavasti

$$a_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \Delta T(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (2.46)$$

missä tähdellä merkitty yläindeksi kuvaa kompleksikonjugaattia ja integraali lasketaan koko avaruuskulman $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$ yli. Laplacen sarjan ensimmäinen kerroin, a_{00} , jota kutsutaan myös *monopoliksi*, kertoo taustasäteilyn keskilämpötilan. Keskilämpötilan poikkeamia tutkittaessa monopoli on määritelmänsä mukaan nolla. Sarjan seuraavat kolme kerrointa, a_{1-1}, a_{10}, a_{11} , kuvaavat taustasäteilyn *dipolia*. Karttana dipoli käsittää yhden suuren kuuman ja kylmän seudun ja tämä rakenne on kooltaan suurin lämpötilan epäisotropia. Fysikaalisesti dipoli on kaksiosainen: se koostuu varsinaisia taustasäteilyn rakenteita kuvaavasta *kosmologisesta dipolista* sekä dominoivasta Doppler efektistä. Tämä efekti syntyy Aurinkokunnan liikkeestä suhteesta taustasäteilyn lepokoordinaatistoon, eikä sitä voida käytännössä erottaa kosmologisesta dipolista. Tämän vuoksi taustasäteilysignaalin multipoliekspansio aloitetaan tavallisesti multipolista $\ell = 2$. Dipolia käytetään erityisesti satelliitin dataa kalibroitaessa eli muunnettaessa satelliitin mittaamaa jännitettä lämpötilan vaihteluiksi.

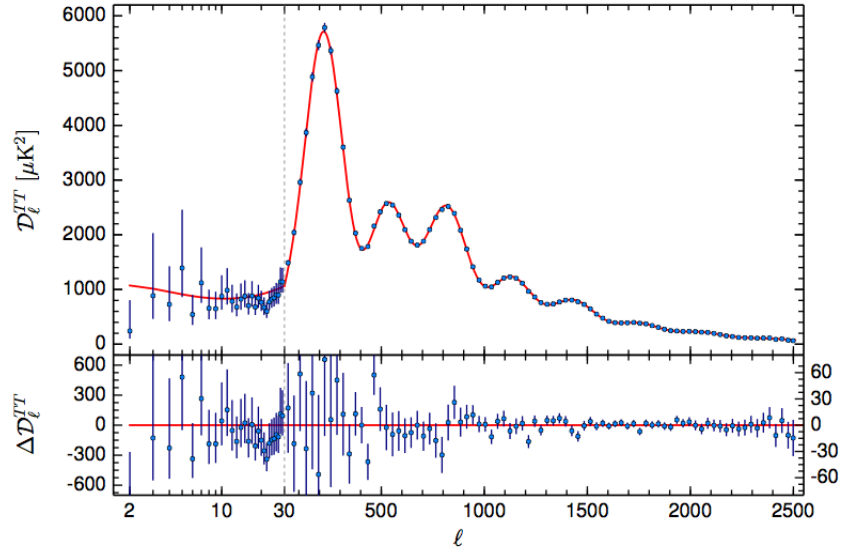
Kartanteossa (tästä lisää luvussa 4) multipoliekspansiota ajatellaan signaalin kannalta kaistarajoitetuksi, eli yhtälön (2.45) ensimmäistä summaa jatketaan vain tiettyyn maksimi ℓ rajaan asti, jota merkitään ℓ_{max} , ja tätä suuremmilla ℓ :n arvoilla signaalin teho oletetaan häviävän pieneksi. Myös toisen summan kohdalla yhtälössä (2.45) summa juoksee väliltä $-\ell_{max}, \ell_{max}$ ja kaikki ne indeksit ℓm , joille $m > \ell$ häviävät. Suurin ℓ :n arvo ℓ_{max} voidaan määritellä asettamalla suurimman mahdollisen palautettavissa olevien $a_{\ell m}$ -kertoimien määräksi $\sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell + 1) = (\ell_{max} + 1)^2 = \frac{4\pi}{\theta_{res}^2}$, missä θ_{res} on taustasäteilyä kartoittavan satelliitin kulmaerotuskyky. Esimerkiksi Planckin korkean taajuuden instrumenttien kulmaerotuskyky on pienimmillään $\theta_{res} \sim 5'$, joka vastaa $\ell_{max} \sim 2400$.

Edellä kuvattuja $a_{\ell m}$ -kertoimia käytetään seuraavassa luvussa 2.5.2, joiden avulla määritellään kosmologisesti merkittävät lämpötilan ja polarisaation kulmatehospektrit.

2.5.2 Lämpötilavaihteluiden kulmatehospektrit

Kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilavaihtelun varianssia multipolin ℓ tai kulmaskaalan funktiona kutsutaan lämpötilan kulmatehospektiksi. Erityisesti teoreettisen kosmologian kannalta taivaan kulmatehospektri on kenties kaikista tärkein havaintoaineisto, sillä kulmatehospektriin parhaiten sovitettujen kosmologisen mallin parametrit antavat tarkat lukuarvot maailmankaikkeuden rakenteesta, geometriasta ja kehityksestä. Kuvassa 2.4 on esimerkki lämpötilan kulmatehospektistä, joka perustuu vuoden 2015 Planck-tuloksiin. Kuvasta nähdään miten hyvin malli ja havainnot sopivat yhteen, kun käytetään yksinkertaisinta kosmologista mallia, joka tunnetaan nimellä Λ CDM. Yksinkertaistettuna kulmatehospektri kertoo, paljonko taustasäteilyn lämpötilakartassa on tietyn suuruista rakennetta tietyllä kulmaskaalalla. Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin kulmatehospektrin fysikaalista formulointia.

Taustasäteilyn erittäin pienet epäisotropiat – lämpötilavaihtelut ja materian tiheysvaihtelut – ovat seurausta inflaation aikaisista kvanttifluktuaatioista, jotka, tunnetun kvanttifysiikan mukaan,



Kuva 2.4: Planckin tuoreimmista tuloksista (2015) tehty lämpötilan kulmatehospektri. Ylemmässä kuvassa sinisiin datapisteisiin on sovitettu standardimallin (Λ CDM) mukainen kulmatehospektri punaisella viivalla. Alemmassa paneelissa on datapisteiden residuaalit verrattuna teoreettiseen malliin. Matalailla multipoleilla näkyvä epätarkkuus johtuu kosmisesta varianssista. Kuvan lähde: [12].

käyttäytyvät satunnaisesti. Niinpä taustasäteilyn epäisotropioita voidaan kuvata ainoastaan tilastollisten tunnuslukujen avulla. Luvussa 2.4.4 kuvatun kaltaiset yksinkertaiset ja havaintoihin yhteensopivat inflaatioteoriat olettavat näiden satunnaisprosessien käyttäytyvän gaussisesti. Tästä silloin seuraa, että myös taustasäteilyn epäisotropiat ovat luonteeltaan gaussisia satunnaismuuttujia. Edellisessä luvussa esitetyt lämpötilavaihteluiden kompleksiset $a_{\ell m}$ -kertoimien häiriöt ovat lineaarisia ensimmäisen kertaluvun häiriöteoriassa ja näin ollen myöskin gaussisia. Koska gaussista jakaumaa karakterisoi vain kaksi tilastollista tunnuslukua, odotusarvo ja varianssi, sisältävät nämä luvut täydellisen informaation lämpötilavaihteluista. Kertoimet $a_{\ell m}$ edustavat lämpötilan poikkeamia keskilämpötilasta, jolloin niiden odotusarvo häviää, eli $\langle a_{\ell m} \rangle = 0$. Ainoaksi nollasta poikkeavaksi tunnusluvuksi jää $a_{\ell m}$ -kertoimien varianssi, joka tunnetaan kosmologiassa paremmin lämpötilavaihteluiden *teoreettisena kulmatehospektrinä*

$$C_\ell \equiv \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (2.47)$$

On syytä huomata, ettei kulmatehospektri riipu suuria taustasäteilyn epäisotropioita kuvaavasta indeksistä m , koska taustasäteily on tilastollisesti isotrooppista. Kulmatehospektri liittyy myös lämpötilavaihteluiden varianssin eri suuruisten rakenteiden kokoskaaloille ℓ [24]

$$\langle T(\theta, \varphi)^2 \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell. \quad (2.48)$$

Tästä seuraa, että mikäli käyrä $(2\ell + 1)C_\ell/4\pi$ esitetään lineaarisesti ℓ :n funktiona, käyrän rajaama

pinta-ala kertoo lämpötilavaihteluiden varianssin eli odotusarvon lämpötilan neliöllisille poikkeamille keskiarvosta.

Kulmatehospektrin ja primordiaalistien häiriöiden tehospektrin $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ välille voidaan johtaa suurilla skaaloilla (pienillä ℓ :n arvoilla) relaatio [24]

$$C_\ell = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{d^3k}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2, \quad (2.49)$$

missä j_ℓ on Besselin pallofunktio. Koska yksinkertaiset inflaatioteoriat ennustavat lähes skaalainvariantin tehospektrin $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx A_s = \text{vakio}$, voidaan tällöin yhtälö (2.49) integroida muotoon

$$C_\ell = \frac{A_s^2}{25} \frac{2\pi}{\ell(\ell+1)}, \quad (2.50)$$

joka voidaan uudelleen kirjoittaa $\ell(\ell+1)C_\ell/(2\pi) = A_s^2/25 = \text{vakio}$. Tämän vuoksi kulmatehospektrin käyrä on tavallisesti esitettynä muodossa

$$\mathcal{D}_\ell \equiv \frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi}, \quad (2.51)$$

käyrän $(2\ell+1)C_\ell/4\pi$ sijaan. Tällöin on helpompi nähdä, että kulmatehospektri on todella skaalainvariantti (vakio) matalimmilla multipoleilla ($\ell \leq 100$).

Edellä esitetty teoreettinen kulmatehospektri ottaa huomioon kaikki mahdolliset $a_{\ell m}$ -kertoimien joukot ja kuvaa näiden yli laskettua odotusarvoa, mutta todellisuudessa emme voi havaita kuin vain yhden tällaisen joukon, omaa maailmankaikkeutamme kuvaavat $a_{\ell m}$ -kertoimet. Niinpä havaintoja varten voidaan määritellä tämän yksittäisen joukon yli lasketun keskiarvon $|a_{\ell m}|$ avulla *havaittu kulmatehospektri*

$$\tilde{C}_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (2.52)$$

Lämpötilavaihteluiden varianssi havaitun kulmatehospektrin avulla ilmaistuna on vain $(T(\theta, \varphi))^2$ keskiarvo taivaanpallon yli

$$\frac{1}{4\pi} \int (T(\theta, \varphi))^2 d\Omega = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \tilde{C}_\ell. \quad (2.53)$$

Kuvitellaan seuraavaksi joukko maailmankaikkeuksia, realisaatioita, jotka ovat syntyneet samasta satunnaisprosessista, mutta joilla kullakin on oma taivaan kulmatehospektri \tilde{C}_ℓ . Yhtälöt (2.48) ja (2.53) eroavat toisistaan siten, että ensimmäinen kuvaa useasta taivaan realisaatiosta saatua lämpötilavaihteluiden odotusarvoa ja jälkimmäinen yksittäisen taivaan realisaation yli laskettua lämpötilavaihteluiden keskiarvoa. Eri realisaatioiden yli laskettu odotusarvo vastaa siten teoreettista kulmatehospektriä

$$\langle \tilde{C}_\ell \rangle = C_\ell \Rightarrow \langle \tilde{C}_\ell - C_\ell \rangle = 0. \quad (2.54)$$

Tämä yhtälö kertoo, että teoreettinen ja havaittu kulmatehospektri ovat lähellä toisiaan. Se, kuinka paljon havaitun kulmatehospektrit keskimäärin vaihtelevat teoreettisesta kulmatehospektristä kutsutaan *kosmiseksi varianssiksi*, jolle pätee [24]

$$\langle (\tilde{C}_\ell - C_\ell)^2 \rangle = \frac{2}{2\ell+1} C_\ell^2. \quad (2.55)$$

Yhtälöstä (2.55) voidaan todeta, että varianssi on suurinta matalimmilla multipoleilla ja pienenee suuremmille multipoleille mentäessä. Syy tähän on ilmeinen. Jokaista multipolia kohti on vain $2\ell + 1$ otosta, jolloin pienillä ℓ :n arvoilla eli suurilla kokoskaaloilla otoshajonta on väistämättä suurempi kuin suurilla ℓ :n arvoilla. Niinpä kosminen varianssi rajoittaa havaitun ja teoreettisen kulmatehospektrin välistä tarkkuutta.

Laajennetaan seuraavaksi kulmatehospektrejä koskevat määritelmät yleisemmälle tasolle ottamalla myös polarisaatio huomioon.

2.5.3 Polarisaation kulmatehospektrit

Kuten luvussa 2.1 jo mainittiin, taustasäteilyn pintaa kutsutaan viimeisen sironnan pinnaksi. Tämä nimi juontaa siitä, että ennen irtikytkeytymistä tältä pinnalta lähteneet fotonit Thomsonsirosivat viimeisen kerran varatuista hiukkasista. Tunnetusti Thomsonin sironnassa valo polarisoituu lineaarisesti. Polarisoitua valoa on optiikassa tapana kuvata Stokesin parametreilla. Ajetellaan kuitenkin aluksi lähes monokromaattista sähkömagneettista tasoaaltoa, joka heilahtelee z -akselin suuntaisesti. Lähes monokromaattinen tarkoittaa tässä yhteydessä, että taajuuskomponentti on jakautunut hyvin pienelle alueelle keskitaaajuuden ω_0 ympärille. Tällöin tasoaallon sähkökentän vektorikomponentit E_x ja E_y , jotka ovat kohtisuorassa aallon etenemissuuntaan nähden, voidaan kirjoittaa muotoon [27]

$$\begin{aligned} E_x &= a_x(t)e^{i[\omega_0 t + \theta_x(t)]}, \\ E_y &= a_y(t)e^{i[\omega_0 t + \theta_y(t)]}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Aallon monokromaattisuus takaa, että vaihekulmat θ_x ja θ_y sekä amplitudit a_x ja a_y muuttuvat hitaasti suhteessa aallon taajuuden käänteislukuun. Aalto määritellään silloin polarisoituneeksi, mikäli minkä tahansa yhtälön (2.56) komponenttien välillä on olemassa korrelaatio. Näiden komponenttien kautta voidaan nyt määritellä Stokesin parametrit:

$$\begin{aligned} I &\equiv |E_x|^2 + |E_y|^2 = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle, \\ Q &\equiv |E_x|^2 - |E_y|^2 = \langle a_x^2 \rangle - \langle a_y^2 \rangle, \\ U &\equiv E_x E_y^* + E_y E_x^* = 2\text{Re}(E_x E_y^*) = \langle 2a_x a_y \cos(\theta_x - \theta_y) \rangle, \\ V &\equiv i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) = 2\text{Im}(E_x E_y^*) = \langle 2a_x a_y \sin(\theta_y - \theta_x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tässä keskiarvot $\langle \rangle$ on otettu sellaisen aikavälin yli, joka on pitkä suhteessa aallon taajuuden käänteislukuun. Ensimmäinen Stokesin parametri I kuvaa säteilyn intensiteettiä. Taustasäteilyn intensiteetti noudattelee tarkasti mustan kappaleen säteilylakia, joka kytkee säteilyn intensiteetin lämpötilaan. Tämän vuoksi taustasäteilyn lämpötilakartoista käytetään toisinaan nimitystä I -kartta. Kolme muuta parametria määrittävät säteilyn polarisaatiotilan. Esimerkiksi polarisomattomalle säteilylle $Q = U = V = 0$. Parametri V kuvaa ympyräpolarisaatiota, jota Thomsonin sironnassa ei synny, joten taustasäteilyä kuvaa täydellisesti Stokesin kolme ensimmäistä parametria.

Parametrit I ja V säilyvät invariantteina koordinaatistomuunnoksissa, mutta Q ja U riippuvat x ja y akseleiden suunnasta. Polarisaatiolle pitäisi siis löytää sellainen muoto, joka ei riipu valitusta koordinaatistosta. Voidaan osoittaa, että kierrettäessä $x-y$ tasoa kulman ψ verran, kuvaa seuraava

koordinaatistomuunnos alkuperäistä aaltoa [28]

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos(2\psi) + U \sin(2\psi), \\ U' &= -Q \sin(2\psi) + U \cos(2\psi), \end{aligned} \quad (2.58)$$

jonka lineaarikombinaatioksi saadaan

$$\begin{aligned} Q' + iU' &= e^{-2i\psi}(Q + iU), \\ Q' - iU' &= e^{+2i\psi}(Q - iU). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Jälkimmäiselle yhtälölle saadaan nyt kehitettyä luvun 2.5.1 mukainen multipoliekspansio spin-2 palloharmonisten funktioiden avulla [27]

$$Q \pm iU = \sum_{\ell m} a_{\pm 2, \ell m \pm 2} Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (2.60)$$

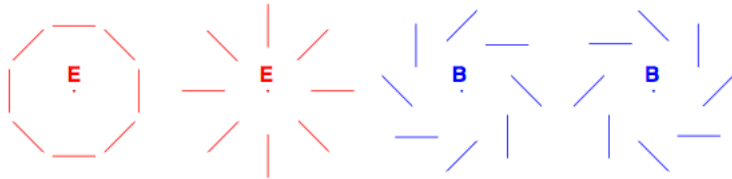
Näiden spin-2 palloharmonisten funktioiden kertoimien lineaarikombinaatioista

$$\begin{aligned} a_{\ell m}^E &\equiv -\frac{1}{2}(a_{2, \ell m} + a_{-2, \ell m}), \\ a_{\ell m}^B &\equiv \frac{i}{2}(a_{2, \ell m} - a_{-2, \ell m}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

voidaan viimein määrittää fysikaalisesti mitattavat ja koordinaatistosta riippumattomat polariisaatiota kuvaavat suureet $E(\theta, \varphi)$ ja $B(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^E Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \\ B(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m}^B Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Matemaattisesti tämä jaottelu on analoginen vektorin jakamisesta gradientista ja divergenssistä riippuviin osiin. Niinpä näitä kenttiä kutsutaan E-moodin (tai G-moodin, engl. gradient) ja B-moodin (tai C-moodin, engl. curl) polarisaatioksi. Kuvassa 2.5 on esitetty mahdolliset E- ja B-moodin polarisaatiokenttien muodot.

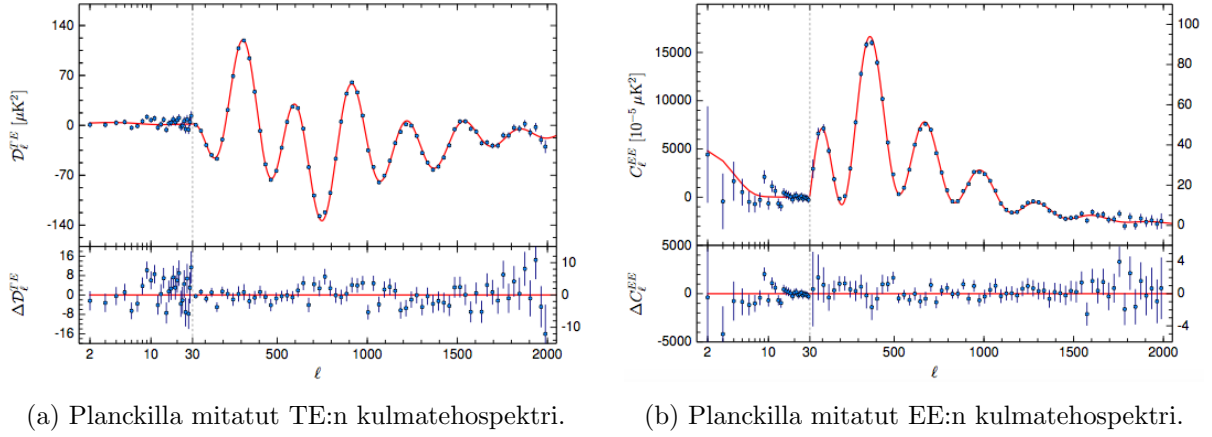


Kuva 2.5: E-moodi ja B-moodi polarisaatiokenttien muodot. B-moodin erottaa E-moodista helpposti sen polarisaatiosuuntien kierteisyydestä.

Jatkossa lämpötilan $a_{\ell m}$ -kertoimet indeksoidaan tarvittaessa T:llä, muodossa $a_{\ell m}^T$, erotuksena polarisaation $a_{\ell m}$ -kertoimista. Vastaavasti kuten lämpötilan multipoliekspansiolle, voidaan teoreettinen kulmatehospektri yleisesti määritellä kaikille lämpötilan ja polarisaation $a_{\ell m}$ -kertoimille

$$C_{\ell}^{XY} = \langle a_{\ell m}^X a_{\ell m}^{Y*} \rangle, \quad (2.63)$$

missä $X, Y = T, E, B$. Lämpötilan ja polarisaation autokorrelaatioiden kulmatehospektreille $X = Y$, ristikorrelaatioille $X \neq Y$. Kaavasta (2.63) nähdään, että ristikorrelaatioespektrit ovat symmetrisiä, eli esimerkiksi $C_\ell^{TE} = C_\ell^{ET}$.



Kuva 2.6: Ylemmissä paneeleissa punaisella käyrällä sovitettu standardi Λ CDM-malli Planckilla mitattuihin datapisteisiin (sinisellä) ja alemmissä paneeleissa mallin residuaalit. Lähde [12].

Tavallisesti gaussisissa kosmologisissa malleissa oletetaan, että alkuperäiset tiheysvaihtelut säilyttivät pariteettisymmetrian. Toisin sanoen maailmankaikkeuttamme ei pitäisi voida tunnistaa toisenlaiseksi sen peilikuvasta. Siispä taustasäteilystä mitattavia kulmatehospektrejä on kuuden sijaan vain neljä, C_ℓ^{TT} , C_ℓ^{EE} , C_ℓ^{BB} ja C_ℓ^{TE} . Esimerkki Planckilla mitatuista TE:n ja EE:n kulmatehospektreistä näkyy kuvassa 2.6. Tässä kohtaa on syytä huomioda, että TE:n kulmatehospektrit käyvät tietyillä multipolin arvoilla nollassa. Tällä käyttäytymisellä on tämän tutkielman simulaatioiden kannalta tärkeä merkitys, ja aiheeseen palataan tarkemmin luvussa 5.2.

Eksoottisemmissa kahtaistaittumisen (engl. birefringence) malleissa oletetaan taivaalla esiintyvän myös hyvin pieniä, mutta nollassa poikkeavia TB- ja EB-korrelaatioita. Tämä tutkielma keskittyy käsittelemään vain gaussisia kosmologisia malleja. Vaikka luvussa 5 esitetyt matriisiikkunafunktiot sisältävätkin TB -ja EB-komponentteja, ovat nämä otettu huomioon vain sen vuoksi, koska menetelmää voidaan soveltaa myös etualan säteilylle, joka sisältää kyseisiä komponentteja.

2.6 Kosmologiset parametrit

Yksinkertainen Λ CDM-malli, joka sopii hyvin yhteen tuoreimpien havaintojen - tarkasti lasketujen kulmatehospektrien - kanssa, riippuu vain kourallisesta parametreista. Tavallisessa Λ CDM-mallissa on mahdollista valita 6-ulotteisesta parametriavaruudesta eri tavoin toisistaan riippumattomia parametreja, mutta tietyt valinnat ovat toisia parempia. Yksi tavallisesti käytetty valintakriteeri on, että valitut parametrit vaikuttavat mahdollisimman eri tavoin taivaan kulmatehospekttriin sovitettavan mallin muotoon, jolloin parametrien aiheuttamat degeneraatiot minimoituvat.

Koska kosmologiset havainnot eivät viittaa kaarevaan avaruuteen eikä kaarevuutta tarvita selittämään havaintoja, voidaan kaarevuustekijä K asettaa nollassa, jolloin $\Omega_0 = 1$. Jos lisäksi

Hubblen parametri H asetetaan muista parametreista riippuvaksi, saadaan Λ CDM-mallille kuusi riippumatonta parametria, jotka on esitetty taulukossa 2.1.

Parametri	Kuvaus	Paras estimaatti
$\Omega_b h^2$	Fysikaalinen baryonien energiatiheys	0.02222 ± 0.00023
$\Omega_c h^2$	Fysikaalinen kylmän pimeän aineen energiatiheys	0.1197 ± 0.0022
Ω_Λ	Pimeän energian energiatiheys	0.685 ± 0.013
τ	Reionisaation optinen syvyys	0.078 ± 0.019
$\ln(10^{10} A_s)$	Primordiaalisen tehospektrin amplitudi	3.089 ± 0.036
n_s	Primordiaalisen tehospektrin spektri-indeksi	0.9655 ± 0.0062

Taulukko 2.1: Λ CDM-mallin perusparametrien tuoreimmat arvot, jotka on saatu sovittamalla Λ CDM-malli Planckin lämpötilan kulmatehospektriin. Lähde: [12].

Tiheysparametrit vastaavat nykyhetkeä ja niitä skaalaava tekijä h on dimensioton Hubblen parametri, joka saadaan Hubblen parametrasta $H_0 = h \times 100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, ja jonka nykyarvo on $h = 0.678$ [12]. Energiatiheyksiä on esitelty lyhyesti luvussa 2.3 ja luvussa 2.4.4 on esitelty primordiaalisen tehospektrin amplitudi ja spektri-indeksi. Kuvailaan vielä lyhyesti kuudes Λ CDM-mallin parametri, reionisaation optinen syvyys τ . Optinen syvyys voidaan määritellä konformiajan funktiona muodossa

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} a(\eta) n_e(\eta) \sigma_T d\eta, \quad (2.64)$$

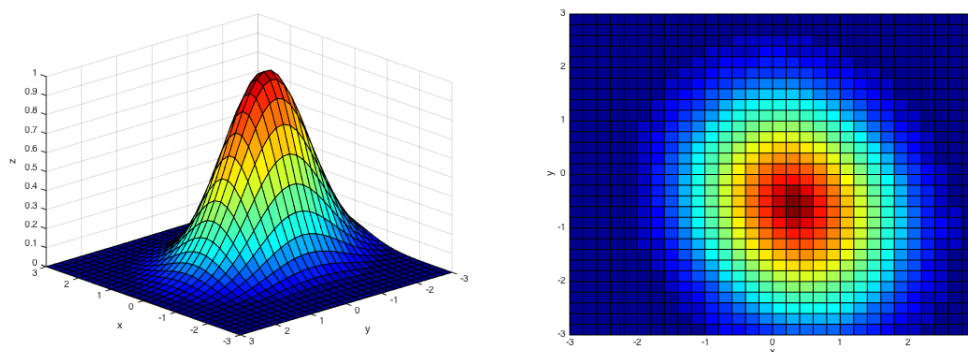
missä σ_T on Thomson-sironnan vaikutusala ja n_e on vapaiden elektronien lukumäärätiheys. Sen avulla voidaan selvittää niiden fotoneiden suhteellinen osuus $f(\eta) = -\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau(\eta)}$, jotka eivät ole sironneet elektroneista lähtöhetken η ja havaintohetken η_0 välillä. Yleisesti, kun $\tau \gg 1$ on maailmankaikkeus läpinäkymätön tai, kun $\tau \ll 1$ on se läpinäkyvä.

Taustasäteilytutkimuksessa on tärkeää tuntea optisen syvyyden käyttäytyminen sekä rekombinaatiossa että myöhemmässä maailmankaikkeuden reionisaatiossa, eli silloin, kun galaksien välinen kaasu uudelleen ionisoitui. Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan määritellä reionisaation optinen syvyys $\tau_r \equiv \tau(\eta_r)$, missä η_r on konformiaika aikaskaalle ennen reionisaatiota, mutta rekombinaation jälkeen. Reionisaation ja rekombinaation monimutkaisen luonteen vuoksi sen tarkempi analyysi sivuutetaan. Kattavampi kuvaus kosmologisten parametrien arvioimisesta mittausdatasta löytyy esimerkiksi vuoden 2014 julkaistusta Savelaisen väitöskirjasta [29], joka käsittelee primordiaalisten häiriöiden karakterisoinnista havainnoilla.

Luku 3

Planckin keilat ja ikkunafunktiot

Tässä osiossa käydään läpi Planck-satelliitin matalan taajuuden instrumentin keiloja ja ikkunafunktioita koskevat määritelmät, keilojen matemaattinen formalismi sekä perehdytetään lukija skalaari- ja matriisi-ikkunafunktioihin.

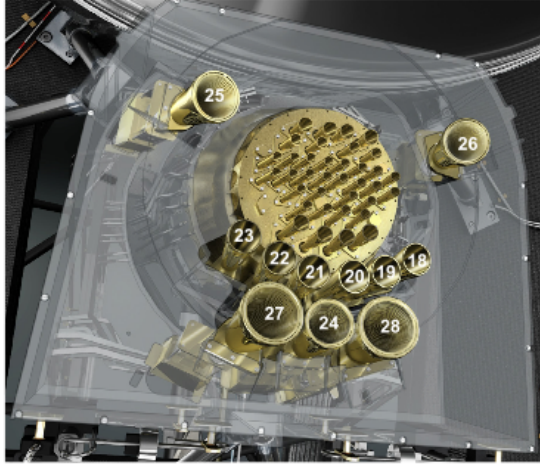


Kuva 3.1: Esimerkki elliptisestä gaussisesta keilasta, joka approksimoi satelliitin yksittäisen radiometrin herkkyyttä vastaanottaen sähkömagneettisen säteilyn intensiteettiä kulmaetäisyyden funktiona. Keilan herkkyys putoaa mentäessä suuremmille kulmaetäisyyksille eli kauemmaksi keilan keskipisteestä. Oikeassa kuvassa radiometrin katselusuunnasta – vasemman kuvan positiivisen z-akselin suunnasta – esitetty keilan profiili, jonka läpimitta on verrannollinen satelliitin yksittäisen syöttötorven läpimittaan.

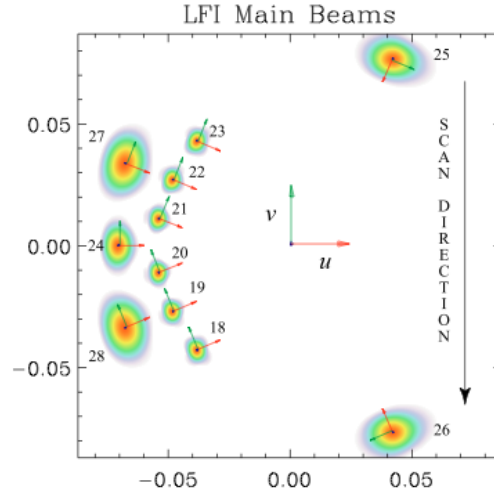
3.1 Keilojen määritelmät

Planckin matalan taajuuden instrumentti (LFI) koostuu 11 syöttötorvesta, joista kukin on kytketty muuntajaan, joka jakaa syöttötorveen saapuvan sähkömagneettisen signaalin kahtia toisiinsa nähden kohtisuorassa saapuviksi lineaarisesti polarisoituneiksi komponenteiksi. Kumpikin polarisaatiokomponentti saapuu erikseen muuntajan toisessa päässä oleville kahdelle radiometrille LFIXXM ja LFIXXS, jotka eivät itsessään ole polarisaatioherkkiä. Tässä XX kuvaa radiometrien numerointia, joka kulkee 18:sta 28:aan. Alun perin mukana olivat myös numerot 1:stä 17:ään, jotka kuuluivat 100 GHz:n torville, mutta nämä poistettiin lopullisesta polttotason torvikonfigu-

raatiosta. Torvet LFI27:stä LFI28:aan kuuluvat Ka-kaistaan ja ne havaitsevat taivasta nimellistajuuksilla 27 - 33 GHz. Näitä torvia kutsutaan tässä tutkielmassa ja virallisesti Planck-projektissa 30 GHz:ksi. Torvet LFI24:stä LFI26:een ovat V-kaistalla ja näitä vastaavat nimellistajuudet ovat 39.6 - 48.4 GHz. Näitä kutsutaan jatkossa 44 GHz:ksi. Torvet LFI18:sta LFI23:een ovat V-kaistalla ja havaitsevat nimellistajuuksilla 63 - 77 GHz. Näitä kutsutaan jatkossa 70 GHz:ksi. Kuvassa 3.2 (a) on esitetty Planck-satelliitin polttotaso, jossa sekä matalan taajuuden instrumentit että korkean taajuuden instrumentit (HFI) sijaitsevat.



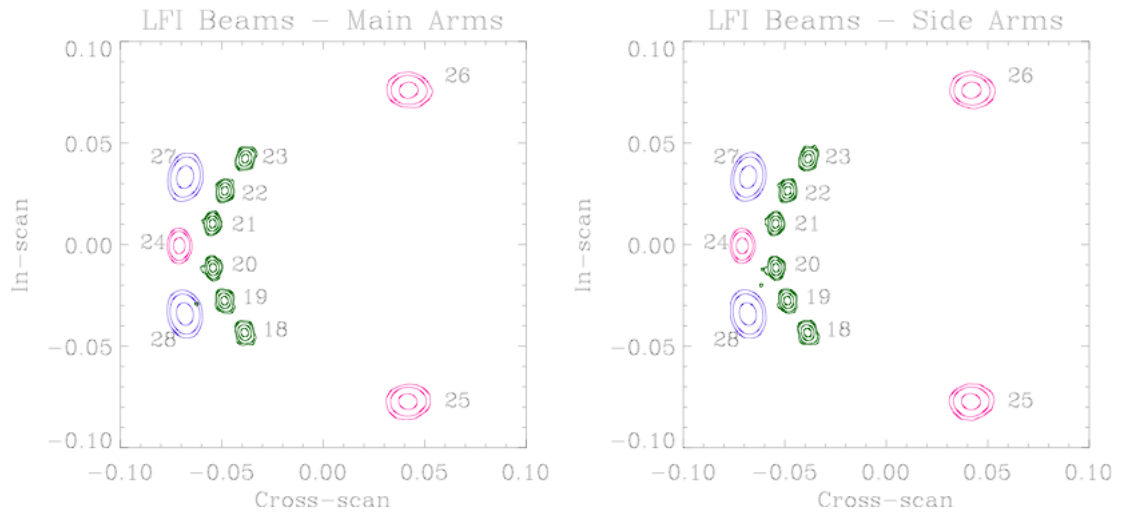
(a) Planckin polttotaso.



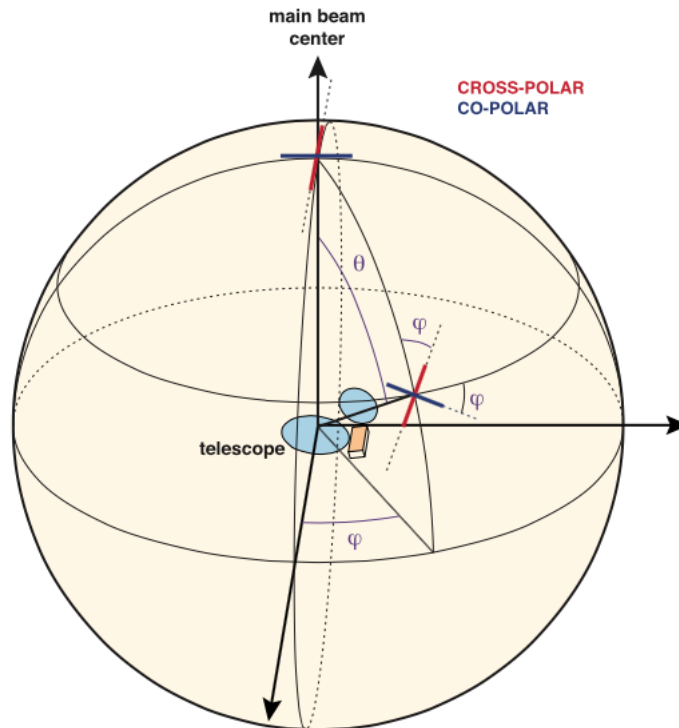
(b) Planckin LFI torvien pääkeilat.

Kuva 3.2: Kuvassa (a) Planckin polttotasolla sijaitsevat LFI:n (reunalla) ja HFI:n (keskellä) syöttötorvet. LFI:n torvet näkyvät numeroituna. Kuvassa (b) LFI torvien pääkeilat taivaalla nähtynä suunnasta, josta havaitsija katselee kohti polttotasoa. Numerot 18 - 23 vastaavat 70 GHz:n torvia, numerot 24 - 26 vastaavat 44 GHz:n torvia ja 27 - 28 vastaavat 30 GHz:n torvia. Satelliitin skannaussuunta on merkitty kuvan oikeaan laitaan. Kuvaajan koko on noin $10^\circ \times 10^\circ$. Kuvien lähde: [30]

Torvien tai radiometrien herkkyyttä mitata taivaalta saapuvaa sähkömagneettista säteilyä – intensiteettiä ja polarisaatiota – eri tulosuunnista kutsutaan spatiaaliseksi vasteeksi, keilan vasteeksi tai lyhyemmin keilaksi (katso kuva 3.1). Tämä herkkyys ilmoitetaan desibeleinä siten, että $\text{dB} = 0$ keilan keskipisteessä ja laskee tätä suuremmilla kulmaetäisyyksillä. Tavallisesti nämä keilat esitetään usealle torvelle tai radiometrille tasokäyrinä satelliitin polttotason lepokoordinaatistossa (katso kuvat 3.2 (b) ja 3.3), siten, että havaitsija katsoo kohti polttotasoa. Kuvan 3.2 (b) yksiköt ovat ilmoitettu $u - v$ koordinaateissa, jotka on Planckilla määritelty $u = \sin \theta_{mb} \cos \varphi_{mb}$ ja $v = \sin \theta_{mb} \sin \varphi_{mb}$, missä θ_{mb} ja φ_{mb} ovat referenssikoordinaatiston mukaiset pallokoordinaatit (katso kuva 3.4). Tässä referenssikoordinaatistossa määritellään suunta, jossa torvi on herkimmillään E-moodin polarisaatiolle (kopolaarinen suunta) ja B-moodin polarisaatiolle (ristipolaarinen suunta). Muuttujien θ_{mb} ja φ_{mb} alaindeksi mb viittaa tietyn torven pääkeilan (engl. main beam) koordinaatistoon ja indeksin on tarkoitus selvittää, että jokaisella keilalla on oma koordinaatistonsa.

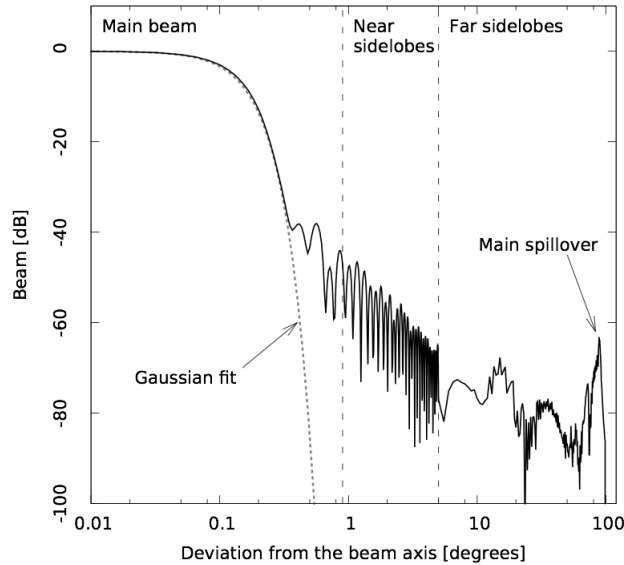


Kuva 3.3: LFI:n molempien M ja S radiometrien pääkeilojen profilikuvat, jotka ovat mitattu neljästä Jupiterin ohituksesta. M radiometrit ovat esitetty vasemmassa kuvassa ja S radiometrit oikeassa kuvassa. 30, 44 ja 70 GHz:n keilat ovat esitetty kuvaajissa violetilla, pinkillä ja vihreällä, tässä järjestyksessä. Tasa-arvokäyrät ovat 70 GHz:lla mitattu -3 , -10 , -20 ja -25 dB:n päähän keilan keskipisteestä, 44 ja 30 GHz:lla -3 , -10 ja -20 dB:n päähän keilan keskipisteestä. Lähde: [31].



Kuva 3.4: Referenssikoordinaatisto, jolla Planck-projektissa määritellään keilan kopolaarinen (engl. co-polar) ja ristipolaarinen (engl. cross-polar) suunta pallokoordinaattien θ_{mb} ja φ_{mb} avulla. Kuvan lähde: [32].

Jotta kosmologian kannalta merkittävä kulmatehospektri saadaan mitattua tarkasti, tulee satelliitin keilojen muodot tietää tarkasti, sillä keiloista aiheutuvat efektit ovat kulmatehospektin suuri systemaattisen virheen lähde [33–35]. Nämä efektit tasoittavat taivaan epäisotropioita vaimentaen kulmatehospektin korkeita multipoleja eli pienen skaalan rakenteita ja tällä tavoin pyyhkivät pois kosmologista informaatiota [34]. Tyypillisesti yksittäinen keila tulee laskea alle -30 dB:n päähän keilan huipusta, jotta saadaan 1% tarkkuus kulmatehospektrille [36]. Mitä suu-



Kuva 3.5: Esimerkki keilojen jaottelusta pääkeilaan ja sivukeiloihin 70 GHz:lla (LFI18S). Jaottelu läheiseen ja kaukaiseen sivukeilaan on toki mielivaltaista, ja Planckissa tämä raja on vedetty 5° asteen päähän pääkeilan keskipisteestä. Suurin etäisten sivukeilojen vuotolähde erottuu kuvan oikeassa alalaidassa suurena piikkinä noin 90° päässä keilan keskipisteestä. Lähde: [37].

rempi kulmaetäisyys keilan keskipisteestä valitaan, sitä enemmän keilan herkkyys putoaa (katso kuva 3.5). Koska keilan koko on kääntäen verrannollinen taajuuteen ovat keilat pienimmillään (ja erotuskyvyltä tarkimmillaan) korkean taajuuden instrumenteilla.

Tässä tutkielmassa, kuten virallisesti Planck-satelliitin matalan taajuuden instrumentteja koskeissa julkaisussa, keilat määritellään kulmaetäisyyksien perusteella kolmeen osaan:

Pääkeilat: Planck-satelliitin matalan taajuuden instrumenteille pääkeila on määritelty ulottumaan 1.9° , 1.3° ja 0.9° :n päähän keilan keskipisteestä näitä vastaavilla 30, 44 ja 70 GHz:n taajuuksilla. Signaalista noin 99% osuu pääkeiloihin, ja loput menevät sivukeiloihin (näiden määritelmä seuraa alempana). Tätä pääkeiloista yli menevää signaalia kutsutaan hajavaloksi, joka on merkittävä systemaattinen virhelähde. Pääkeilan muotoa voidaan matemaattisesti kuvata kenttänä taivaalla $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi)$, joka riippuu kolmesta muuttujasta: joukosta pallokoordinaatteja $\mathbf{n} = (\theta, \varphi)$, jotka kuvaavat kentän eri pisteiden koordinaatteja, sopivasti valitusta suunnasta $\mathbf{n}_0 = (\theta_0, \varphi_0)$, joka esimerkiksi voi olla suunta, jossa keila on intensiteetiltään suurimmillaan, ja kulmasta ψ , joka kuvaa keilan orientaatiota \mathbf{n}_0 :n suhteen. Mikäli sivukeiloja ei huomioida, voidaan pääkeilat normittaa ykköseen $\int_{4\pi} d\Omega B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi) = 1$. Mielivaltainen keilan suunta $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi)$ taivaalla saadaan pyörittämällä ja kiertämällä keilaa referenssipisteestä todelliseen keilan suuntaan \mathbf{n}_0 ja

orientaatioon ψ . Tavallisesti referenssisuunnaksi valitaan $\mathbf{n}_0 = \hat{\mathbf{z}}$ eli suunta, joka osoittaa kartan pohjoisnavalle ja $\psi = 0$. Tällöin keila voidaan esittää kierto-operaattorin \hat{D} avulla

$$B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi) = \hat{D}(\mathbf{n}_0, \psi) B(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{z}}, 0), \quad (3.1)$$

missä $\hat{D}(\mathbf{n}_0, \psi) = \hat{D}(\varphi_0, \theta_0, \psi)$ kuvaa oikean käden säännön mukaista aktiivisen muunnoksen kierto-operaattoria, jonka kulmamuuuttujat ovat Eulerin kulmia $\alpha = \varphi_0, \beta = \theta_0$ ja $\gamma = \psi$ [38]. $B(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{z}}, 0)$ kuvaa keilaa referenssiasennossa ja orientaatiossa, mistä voidaan tehdä myös palloharmoninen kehitelmä

$$B(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{z}}, 0) = \sum_{\ell m} b_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad (3.2)$$

missä $b_{\ell m}$ ovat kehitelmän kertoimet. Sijoittamalla nyt saatu kehitelmä yhtälöön (3.1) ja käyttämällä relaatiota [39]

$$\hat{D}(\mathbf{n}_0, \psi) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{m'm}^{\ell}(\varphi_0, \theta_0, \psi) Y_{\ell m'}(\mathbf{n}), \quad (3.3)$$

missä $D_{m'm}^{\ell}(\varphi_0, \theta_0, \psi)$ on rotaatio-operaattorin matriisielementit (Wignerin D-funktio [38]), saadaan yhteys kertoimien $b_{\ell m}$ ja keilan mielivaltaisen asennon välille

$$B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi) = \sum_{\ell m} b_{\ell m}(\mathbf{n}_0, \psi) Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (3.4)$$

Yhtälöstä (3.4) voidaan huomata, että kertoimet $b_{\ell m}(\mathbf{n}, \psi)$ riippuvat keilan katselusuunnasta ja orientaatiosta

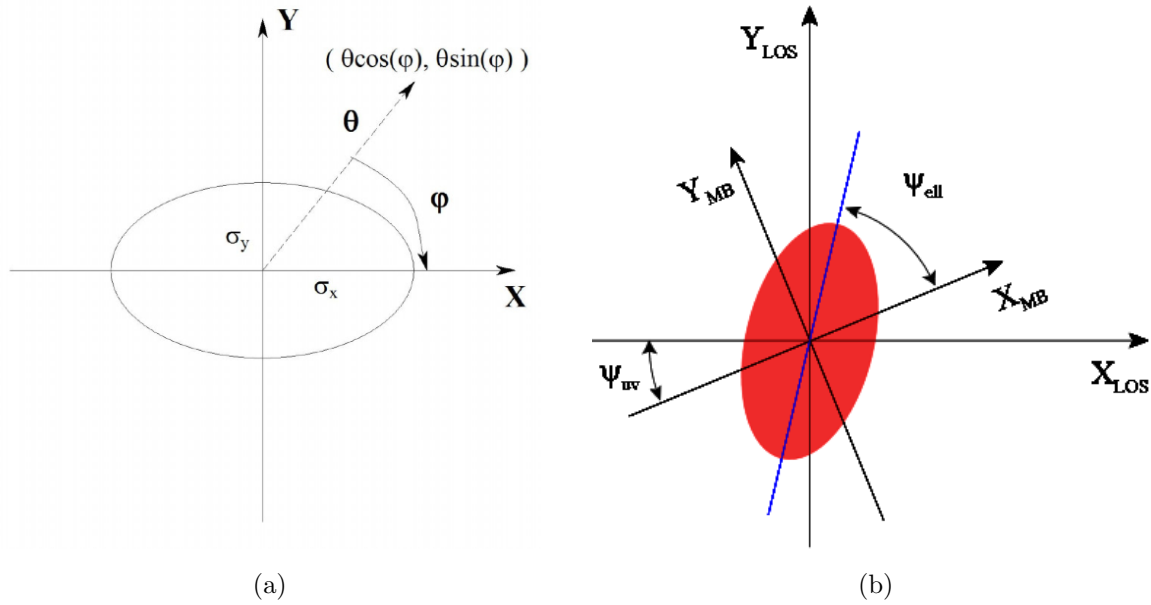
$$b_{\ell m}(\mathbf{n}, \psi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} b_{\ell m'} D_{mm'}^{\ell}(\varphi_0, \theta_0, \psi). \quad (3.5)$$

Edellä saatu esitys on siis yleinen palloharmoninen kehitelmä pääkeilalle. Kuitenkin, koska Planck-satelliitin pääkeilat taivaalla kattavat vain pienen avaruuskulman kerralla (esimerkiksi 30 GHz:n suurimman keilan FWHM $\approx 33'$), voidaan tällöin keiloja approksimoida pallomaisen tai-vaan sijaan laakealle taivaalle elliptisinä gaussisina keiloina [40, 41].

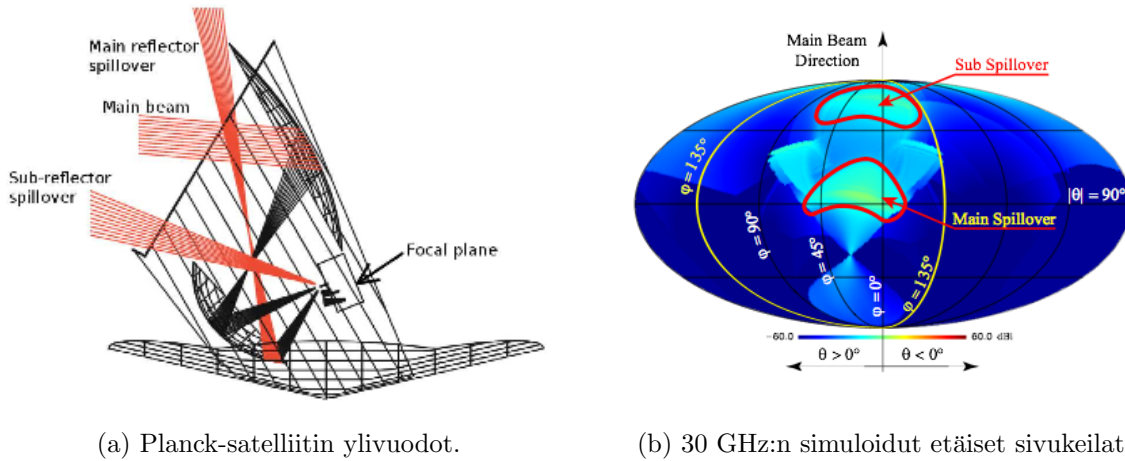
Tarkastellaan seuraavaksi sellaista elliptistä gaussista pääkeilaa, joka osoittaa referenssipisteseen ($\mathbf{n}_0 = \hat{\mathbf{z}}$). Tämän pääkeilan isoakseli on tasokoordinaateissa x-akselin suuntainen ja pikkuakseli y-akselin suuntainen (katso kuva 3.6 (a)). Kuvasta 3.6(a) nähdään keilaa kuvaavien tasokoordinaattien (x,y) ja pallokoordinaattien (θ, φ) välinen yhteys. Elliptiselle gaussiselle keilalle referenssipisteessä saadaan muoto [41]

$$B(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{z}}, 0) = B(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (3.6)$$

missä σ_x ja σ_y ovat keilan iso- ja pikkuakseli. Keilaa on Planckissa tapana kuvata näiden muuttujien sijaan keilan elliptisyyden, puoliarvoveykyksien (FWHM) geometrisen keskiarvon ja keilan orientaation ψ avulla. Keilan elliptisyys määritellään $\epsilon \equiv \sigma_x/\sigma_y$, $\epsilon \geq 1$, isoakselin puoliarvoveydeksi saadaan $\text{FWHM}_x = \sqrt{8 \ln 2} \sigma_x$, pikkuakselin puoliarvoveydeksi saadaan $\text{FWHM}_y = \sqrt{8 \ln 2} \sigma_y$ ja puoliarvoveyden geometrinen keskiarvo on $\text{FWHM} = \sqrt{8 \ln 2 \sigma_x \sigma_y}$. Tarkemmin ottaen Planck-projektissa ei yleensä ilmoiteta keilan kiertosuuntaa ψ kartan pohjoisnavan suhteen,



Kuva 3.6: Kuvassa (a) elliptisen gaussisen keilan muoto kartan pohjoisnavalla. Kuvan pohjoisnapa eli z-akseli osoittaa kohti katsojaa. Tämä pieni osa taivasta on approksimoitu laakeaksi tasoksi, jota kuvaa (x,y) -koordinaatisto. Kuvasta nähdään ellipsin isoakseli σ_x , joka on x-akselin suuntainen ja pikkuakseli σ_y , joka on y-akselin suuntainen. Kuvan lähde: [42]. Kuvassa (b) geometrinen kuvaus keilan orientaation ψ_{ell} :n määritelmästä. Pääkeilan koordinaattiakselit $(xy)_{mb}$ ovat määriteltä suunniksi, joissa pääkeila on herkkä polarisaatiolle. ψ_{ell} määritellään tällöin elliptisen, gaussisen pääkeilan isoakselin ja pääkeilan koordinaatiston x-akselin väliseksi kulmaksi. Lähde: [31]



(a) Planck-satelliitin ylivuodot.

(b) 30 GHz:n simuloidut etäiset sivukeilat.

Kuva 3.7: Kuvassa (a) Planck-satelliitin pää- ja sivuvuodon suunnat, ja pääkeilasta tulevan säteilyn heijastuminen peilien kautta polttotasolla oleviin detektoreihin. Lähde: [43]. Kuva (b) esittää simuloituja 30 GHz:n etäisiä sivukeiloja. Pääkeila osoittaa kartassa ylöspäin, joka on määriteltä pääkeilan suuntakulmaksi $\theta = 0$. Pää- ja sivuvuotoalueet näkyvät punaisella korostettuina tasokäyrinä. Päävuotoalue on suurimmillaan noin 2 dBi ja se osoittaa noin 85° kulmaan pääkeilan suuntakulmasta. Sivuvuotoalue on suurimmillaan noin -8 dBi. Lähde: [37].

vaan tämä kiertosuunta (ψ_{ell} , erotuksena ψ :stä) määräytyy pääkeilan koordinaatiston $(xy)_{mb}$ ja keilan isoakselin suunnan väliseksi kulmaksi (katso kuva 3.6 (b)).

Keilan todellinen muoto voidaan mitata, kun satelliitin näkökenttä leikkaa pistelähteen, jolla on korkea signaali-kohinasuhde ja joka ei ole polarisoitunut. Planckissa LFI:n keilojen muodot on mitattu kirkkaasta, ei-polarisoituneesta Jupiterista ja HFI:n keilat Marsista. Kun näihin mitauksiin tehdään paras yhtälön (3.4) mukainen sovite, saadaan selville pääkeilan muotoa approksimoivat parametrit, puoliarvoleveys, elliptisyys ja keilan orientaatio. Viralliset Planckin pääkeilaa kuvaavat parhaimman gaussisen sovituksen parametrit on esitetty taulukossa 3.1, joita käytetään muutamissa tämän tutkielman simulaatioissa. Kuitenkin, tarkempi sovite todellisille keiloille saadaan keilojen GRASP-simulaatioista. GRASPilla (engl. General Reflector Antenna Software Package) tarkoitetaan Kööpenhaminassa toimivan kaupallisen Ticra-yhtiön tekemää monikäyttöistä koodia, jonka Multi GTD lisäosa osaa jäljittää säteiden tulosuunnat esimerkiksi Planck-satelliitin kaltaiseen monimutkaiseen optiseen systeemiin. Kaikki Planck-satelliittia koskevat todenmukaiset keilat on luotu kyseisellä GRASP-koodilla ja näistä keiloista käytetään tässä tutkielmassa ja yleensä Planck-julkaisussa nimitystä *GRASP-keila*.

Harmonisessa avaruudessa elliptisen ja gaussisen keilan palloharmonisen kehitelmän kertoimet $b_{\ell m}$ ovat [44]

$$b_{\ell m} = \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell + |m|)!}{(\ell - |m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \ell^{-|m|} I_{|m|/2} \left[\frac{\ell(\ell + 1)\sigma^2(\epsilon - 1/\epsilon)}{4} \right] \times \exp \left[-\frac{\ell(\ell + 1)\sigma^2(\epsilon + 1/\epsilon)}{4} \right]. \quad (3.7)$$

Tässä I_ν kuvaa ensimmäisen kertaluvun modifioitua Besselin funktiota ja σ elliptisen gaussisen funktion isoakselin ja pikkuakselin geometrasta keskiarvoa $\sigma = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$. Koska keilat ovat 180 asteen suhteen kiertosymmetrisiä, häviävät tällöin sellaiset kertoimet, joille m on pariton. Erikoistapaus keilojen $b_{\ell m}$ -kertoimista on pyöreä gaussinen keila ($\epsilon = 1$), jolle nollasta poikkeavat m :n arvot häviävät ja jäljelle jää ne kertoimet, jolle $m = 0$ eli

$$b_{\ell 0} = \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[-\frac{\ell(\ell + 1)\sigma^2}{2} \right]. \quad (3.8)$$

Läheiset sivukeilat: Vaikka läheisten ja etäisten sivukeilojen alku- ja loppuosat voidaan määritellä mielivaltaisesti, on läheiset sivukeilat sovittu Planckin keiloilla ulottumaan pääkeilasta 5° päähän keilan keskipisteestä. Kuvasta 3.5 voidaan havaita läheisten sivukeilojen tyypillinen herkkyys sekä muoto. Läheiset sivukeilat voivat olla merkittävä systemaattinen virhelähde, kun satelliitti skannaa taivasta lähellä Linnunradan tasoa, tai kun keila on lähellä kirkasta pistelähdettä, kuten planeettaa. Niinpä Planckissa läheisten sivukeilojen systemaattiset efektit minimoidaan maskaamalla sopivasti sekä Linnunradan taso että kirkkaat pistelähteet [45].

Etäiset sivukeilat: Tärkeä systemaattisten efektien virhelähde Planck-satelliitissa ovat etäiset sivukeilat, jotka ovat määritelty ulottumaan yksittäisellä keilalla 5° yli pääkeilan keskipisteestä. Sen huomioiminen on kriittistä, sillä sivukeiloista aiheutuva hajavallo vaikuttaa suoraan havaittuun ikkunafunktioon ja fotometriseen kalibraatioon. Hajavallo on jakaantunut epätasaisesti taivaalle, mutta sillä on kaksi keskittymää, jotka on nimetty pää- ja sivuvuotoalueiksi. Päävuotoalue syntyy suurimmaksi osaksi säteistä, jotka heijastuvat satelliitin sivupeilin alaosaan. Päävuotoalueen intensiteetti on alle -50 dB (tai ajateltaessa detektoria isotrooppisena antennina tämä on noin

2 dBi) pääkeilan intensiteetistä [37]. Sen suunta on yhdensuuntainen satelliitin pyörimisakselin kanssa eli päävuotoalue on noin 85° päässä pääkeilan katselusuunnasta. Sivuvuotoalue puolestaan syntyy säteistä, jotka eivät ole kosketuksissa ollenkaan satelliitin peileihin. Näiden intensiteetti on pienempi kuin päävuotoalueella ja suunta on noin 20° pääkeilasta. Kuvassa 3.7 (a) näkyvät pää- ja sivuvuodon suunnat, josta hajavallo saapuu polttotason detektoreihin ja kuvassa 3.7 (b) on esitetty miltä nämä vuodot näyttävät karttatasolla. Erityisesti 30 GHz:n taajuuskaistalla hajavallo on ongelmallinen, koska tällä taajuudella diffuusit Linnunradan emissiokomponentit ovat varsin voimakkaita muihin taajuuksiin nähden. Vuoden 2013 LFI:n keiloja koskevassa Planck-julkaisussa arvioitiin koko säteilykeilan tehosta noin 1% tulevan hajavalosta matalan taajuuden instrumenteille [31]. Pääkeilan tehoa skaalattiin tällöin sopivalla tekijällä, jotta tämä puuttuva teho saatiin normitettua oikein. Vastaavassa, vuoden 2015 Planck-julkaisussa puolestaan käytettiin pääkeilan sijaan jo koko keilaa, jonka suhteen myös normitus tehtiin [37]. Koska hajavalon käyttäytyminen on erittäin monimutkainen suorien mittausten kannalta, joudutaan hajavalloa tutkimaan optisten simulaatioiden avulla. Planckissa hajavalosta aiheutuvaa efektiä on korjattu kahdessa osassa: ensin satelliitista saatu data on kalibroitu siten, että hajavalosta aiheutuva efekti on huomioitu mukaan [46], jonka jälkeen Linnunradan hajavalon malli on vähennetty varsinaisesta datasta ja hajavalosta jäljelle jäävää osaa on käsitelty kohinana [37]. Varsinainen hajavalon signaali on arvioitu taivaan emissiolähteistä muodostetun mallin avulla sekä etäisten sivukeilojen mallista, joka pohjautuu *GRASP-keiloihin* ja radiometrien keilojen muotoihin.

Näiden kolmen keilatyypin lisäksi keiloille on olemassa Planckissa seuraavat tärkeät määritelmät:

Optinen keila: Tämä määritellään teleskoopin syöttötorven optisena vasteena, joka on riippumaton yksittäisen radiometrin vasteesta ja satelliitin liikkeestä (pyörimisestä ja skannausstrategiasta). Optinen keila edustaa siten täysin puhdasta *ikkunafunktiota* (ikkunafunktioista lisää alempana). Optisten keilojen ominaisuudet saadaan pääkeiloille arvioitua Maassa tehdyillä mittauksilla varmistettujen optisten simulaatioiden kautta.

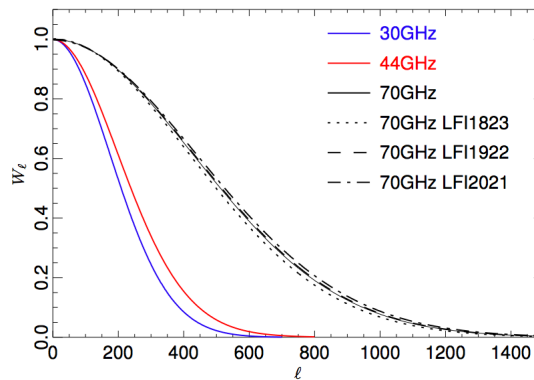
Havaintokeila: Tämä keila saadaan suoraan Planck-satelliitilla tehdyistä planeettahavainnointeja koskevista mittauksista, ja se poikkeaa optisesta keilasta siten, että se huomioi sekä yksittäisen radiometrin vasteen että satelliitin liikkeen. Satelliitin liike venyttää keilaa satelliitin skannaussuunnassa ja tämän seurauksena havaintokeilalla on optista keilaa hieman suurempi elliptisyys, avaruuskulma ja kulmaresoluutio.

Efektiivinen keila: Tämä keila määritellään karttatasossa. Se saadaan jokaiselle kartan pikselille laskettua erikseen laskemalla keskiarvo niiden havaintokeilojen yli, joiden keskipiste on osunut kyseiseen pikseliin, kun satelliitin skannausstrategia ja keilan orientaatio otetaan huomioon. Niinpä yhdellä radiometrillä on vain yksi havaintokeila ja optinen keila, mutta efektiivisiä keiloja on yhtä monta kuin kartassa on pikseleitä. Efektiivisen keilan konvoluutio signaalin kanssa saa aikaan havaitun taivaan kartan. Tästä seuraa, että efektiivisiä keiloja kuvaavat ikkunafunktiot kuvaavat todellisten ja havaittujen kulmatehospektrien välisiä eroja [31].

Beam	FWHM (arcmin)	Ellipticity ϵ	ψ_{ell} (degrees)
70 GHz			
18M	13.40 ± 0.02	1.235 ± 0.004	85.74 ± 0.41
18S	13.46 ± 0.02	1.278 ± 0.004	86.41 ± 0.33
19M	13.14 ± 0.02	1.249 ± 0.003	78.82 ± 0.35
19S	13.09 ± 0.02	1.281 ± 0.002	79.15 ± 0.30
20M	12.83 ± 0.02	1.270 ± 0.003	71.59 ± 0.32
20S	12.83 ± 0.02	1.289 ± 0.004	72.69 ± 0.31
21M	12.75 ± 0.02	1.280 ± 0.003	107.99 ± 0.27
21S	12.86 ± 0.02	1.294 ± 0.003	106.96 ± 0.29
22M	12.92 ± 0.02	1.264 ± 0.003	101.87 ± 0.30
22S	12.99 ± 0.02	1.279 ± 0.003	101.61 ± 0.30
23M	13.32 ± 0.02	1.235 ± 0.004	93.53 ± 0.40
23S	13.33 ± 0.02	1.279 ± 0.004	93.49 ± 0.36
44 GHz			
24M	23.18 ± 0.05	1.388 ± 0.005	89.82 ± 0.33
24S	23.03 ± 0.04	1.344 ± 0.003	89.97 ± 0.34
25M	30.02 ± 0.07	1.191 ± 0.005	115.95 ± 0.75
25S	30.79 ± 0.07	1.188 ± 0.005	117.70 ± 0.74
26M	30.13 ± 0.08	1.191 ± 0.006	61.89 ± 0.84
26S	30.52 ± 0.08	1.189 ± 0.006	61.53 ± 0.77
30 GHz			
27M	32.96 ± 0.06	1.364 ± 0.005	101.20 ± 0.34
27S	33.16 ± 0.07	1.379 ± 0.005	101.29 ± 0.34
28M	33.17 ± 0.07	1.366 ± 0.006	78.17 ± 0.36
28S	33.12 ± 0.07	1.367 ± 0.005	78.47 ± 0.33

Taulukko 3.1: Tärkeimmät havaintokeilaa kuvaavat parametrit $\pm 1\sigma$ epävarmuudella ilmoitettuna.

Lähde: [37]



Kuva 3.8: Planckin viralliset CMB Monte Carlo –simulaatioilla lasketut lämpötilan skalaari-ikkunafunktiot 30, 44 ja 70 GHz:n pääkeiloille. Lisäksi kuvassa on esitetty 70 GHz:n torvipareille LFI18-23, LFI19-22 ja LFI20-21 lämpötilan skalaari-ikkunafunktiot pääkeiloille. Nämä ikkunafunktiot on laskettu 102:sta realisaatiosta käyttämällä pääkeiloina virallisia vuoden 2013 Planckin havaintokeiloja [31].

3.2 Keilojen skalaari-ikkunafunktiot

Kuten jo edellä mainittiin, keilojen profiilit vaimentavat eniten todellisen kulmatehospektrin pienimpiä kokoskaaloja, mutta myös nämä skaalat sisältävät kosmologisesti merkittävää informaatiota. Keilojen vaikutus halutaan siis poistaa havaituista kulmatehospektreistä. Koska kulmatehospektrit on määritelty harmonisessa avaruudessa, on myös käytännöllistä kuvata keilojen profiileja tässä avaruudessa.

Harmonisessa avaruudessa detektorien mittausherkkyyttä kutsutaan keilan siirtofunktioksi tai ikkunafunktioksi. Tässä tutkielmassa on tarkoitus erottaa tavallinen ikkunafunktio (skalaari-ikkunafunktio) matriisi-ikkunafunktiosta, joten, ellei toisin mainita, termillä ikkunafunktio tarkoitetaan nimenomaan skalaari-ikkunafunktiota.

Instrumentin havaittu signaali $\tilde{T}(\mathbf{n}_0, \psi)$ tietyllä katselusuunnalla \mathbf{n}_0 ja keilan orientaatiolla ψ on konvoluutio äärellisen kulmaresoluution omaavan keilan $B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi)$ ja varsinaisen signaalin $T(\mathbf{n}_0)$ välillä

$$\tilde{T}(\mathbf{n}_0, \psi) = \int_{4\pi} d\Omega_{\mathbf{n}} B(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \psi)^* T(\mathbf{n}_0), \quad (3.9)$$

missä $*$ tarkoittaa kompleksikonjugaattia. Harmonisessa avaruudessa tämä vastaa matalakaista-suodatinta ja tässä avaruudessa yhtälö (3.9) voidaan kirjoittaa muodossa ¹

$$\tilde{T}(\mathbf{n}_0, \psi) = \sum_{\ell m} b_{\ell m}^*(\mathbf{n}_0, \psi) a_{\ell m}. \quad (3.10)$$

Yhtälöistä (3.10), (2.47), (2.52), (2.53) ja ehdosta, jonka mukaan $a_{\ell m}$ -kertoimet ovat toisistaan riippumattomia ($\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}$) seuraa, että harmonisessa avaruudessa ja täydellä taivaan peitolla keilojen aiheuttamat efektit havaittuun kulmatehospektriin voidaan kirjoittaa muotoon

$$W_{\ell}^{scal} = \langle \hat{C}_{\ell} \rangle / C_{\ell}, \quad (3.11)$$

missä W_{ℓ}^{scal} on keilan skalaari-ikkunafunktio, joka sisältää keilojen aiheuttamat efektit ja $\langle \rangle$ on odotusarvo, joka on laskettu taivaan eri realisaatioiden yli. Käytännössä tämä odotusarvo lasketaan CMB Monte Carlo –simulaatioilla, jota käydään tarkemmin läpi luvussa 5.1. Kaavan (3.11) ikkunafunktiot ovat tarkkoja ainoastaan lämpötilan ja E-moodin autokorrelaatioille. B-moodille, tämän ristikorrelaatioille ja lämpötilan ja E-moodin ristikorrelaatioille skalaari-ikkunafunktiot eivät ole tarkkoja, koska näiden kulmatehospektrit kulkevat tietyillä multipoleilla nollan lähellä. Kuvassa 3.8 on havainnollisuuden vuoksi esitetty CMB Monte Carlo –simulaatioilla lasketut lämpötilan skalaari-ikkunafunktiot pääkeiloille sekä kaikilla kolmella LFI:n taajuudella että 70 GHz:n torvipareilla. Seuraavassa luvussa on esitetty myös kuva simuloidusta E-moodin skalaari-ikkunafunktiosta.

Todellinen taivaan kulmatehospektri \tilde{C}_{ℓ} saadaan selville, kun satelliitin havaitsema kulmatehospektri \hat{C}_{ℓ} jaetaan skalaari-ikkunafunktiolla eli

$$\tilde{C}_{\ell} = (W_{\ell}^{scal})^{-1} \hat{C}_{\ell}. \quad (3.12)$$

¹Voidaan osoittaa, että mikäli kahden taivaalla olevan kentän $F(\mathbf{n})$ ja $G(\mathbf{n})$ palloharmoniset kertoimet ovat $f_{\ell m}$ ja $g_{\ell m}$, niin tällöin pätee $\int_{4\pi} d\Omega_{\mathbf{n}} F^*(\mathbf{n}) G(\mathbf{n}) = \sum_{\ell m} f_{\ell m}^* g_{\ell m}$.

Todellisuudessa taivaan peitto ei ole koskaan lähes täydellinen, sillä ne alueet, joita etualan säteily, kuten linnunradan taso ja kirkkaat pistelähteet, dominoi peitetään kartta-avaruudessa maskilla, jolloin yhtälö (3.11) ei enää päde. Tämän sijaan maskattujen karttojen havaituille kulmatehospektreille käytetään arviota

$$\hat{C}_\ell = \sum_{\ell'} M_{\ell\ell'} W_{\ell'} \tilde{C}_{\ell'}, \quad (3.13)$$

missä kytkentämatriisi $M_{\ell\ell'}$ sisältää geometrisen multipolista toiseen kytkennän, joka syntyy maskatusta taivaasta. Voidaan kuitenkin osoittaa [31], että ero täyden taivaan ja maskatun taivaan ikkunafunktioiden välillä on marginaalisen pieni verrattuna ikkunafunktioiden virheiden verhoikäyrään. Tästä syystä maskatun taivaan skalaari-ikkunafunktiot voidaan edelleen arvioida yhtälöstä (3.11).

3.3 Matriisi-ikkunafunktiot

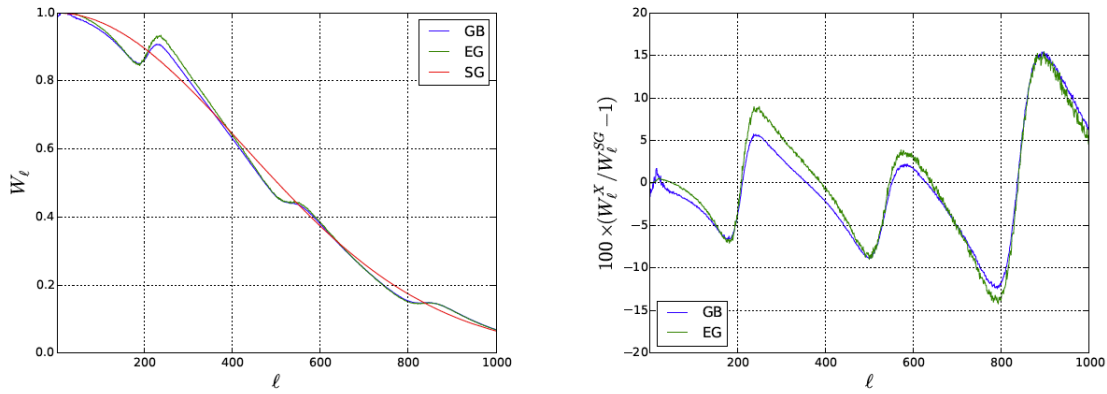
Tässä osassa esitellään mitä matriisi-ikkunafunktiot ovat, miten ne määritellään ja mihin niitä tarvitaan. Näihin tullaan palaamaan takaisin luvussa 5.1, jossa matriisi-ikkunafunktioita validoidaan ja tarkastellaan lähemmin simulaatioiden avulla.

Vuoden 2015 matalan taajuuden instrumenttien keiloja koskevassa Planck-julkaisussa [37] tuli esille skalaari-ikkunafunktioita koskeva ongelma – lämpötilasignaalia vuotaa polarisaatioon. Efektiiä on havainnoillistettu tekemällä kolme 70 GHz:n torviparin 18/23 puhdasta taustasäteilyä sisältävää simulaatiota (kuva 3.9, vasen kuvaaja), jotka poikkeavat toisistaan vain erilaisilla havaintokeiloilla: yksi on toteutettu pyöreillä gaussisilla keiloilla, toinen elliptisillä gaussisilla keiloilla ja kolmas todenmukaisilla GRASP-keiloilla. Koska nämä kolme simulaatiota sisälsivät vain taustasäteilyn signaalia, kuvaajassa 3.9 näkyvät efektit eivät tällöin johdu lainkaan etualan säteilystä.

Lämpötilavuoto polarisaatioon ($T \rightarrow E$ vuoto) ja skalaari-ikkunafunktioiden riippuvuus käytetystä kulmatehospektrin mallista on päätelty siitä, että ikkunafunktioissa 3.9 havaittavat heilahtelut, jotka näkyvät vain simulaatioissa, joissa on käytetty todenmukaisia tai elliptisiä keiloja, osuvat niille ℓ :n arvoille, jotka sijaitsevat lämpötilan kulmatehospektrin akustisten piikkien kohdilla. Koska pyöreillä gaussisilla keiloilla tätä efektiä ei havaita, voidaan tästä päätellä, että $T \rightarrow E$ vuoto johtuu siitä, miten satelliitin skannausstrategia ja havaintokeilan muoto kytkeytyvät toisiinsa. Kuvan 3.9 oikeanpuoleisesta kuvaajasta nähdään, että suurinta vuotoa aiheuttaa keilan elliptisyys, erityisesti suurilla ℓ :n arvoilla (luokkaa 900), jossa vuodon osuus on suurimmillaan noin 15 %. Koska myös todenmukaiset keilat ovat muodoltaan elliptisiä, on ilmeistä, että myös todenmukaisten keilojen skalaari-ikkunafunktioissa näkyy suuri $T \rightarrow E$ vuoto.

Skannausstrategian ja keilojen muodon kytkennän lisäksi skalaari-ikkunafunktiot riippuvat lisäksi oletetusta kulmatehospektrin muodosta. Ikkunafunktion haluttaisiin kuitenkin olevan taivaalta tulevasta signaalista riippumaton suure, joka kuvaa vain instrumenttien ja skannausstrategian vaikutuksia havaintoihin.

Signaalivuoto ei rajoitu skalaari-ikkunafunktioilla pelkästään lämpötilasta E-moodi polarisaatioon, vaan yhtäläillä lämpötilasignaalia vuotaa myös B-moodi polarisaatioon ja päinvastoin polarisaatiota voi vuotaa lämpötilaan. Tästä eteenpäin mitä tahansa vuotoa komponentista toiseen tullaan kutsumaan $T - P$ vuodoksi.



Kuva 3.9: **Vasen kuvaaja:** E-moodi polarisaation skalaari-ikkunafunktioiden vertailua erilaisilla pääkeilan muodoilla.

Sininen käyrä: Simuloiduista GRASP-keiloista laskettu ikkunafunktio.

Punainen käyrä: Pyöreillä gaussisilla keiloilla ja GRASP-keilojen puoliarvoveveyksillä laskettu ikkunafunktio.

Vihreä käyrä: Elliptisillä gaussisilla keiloilla ja GRASP-keiloja kuvaavilla keilojen parametreilla laskettu ikkunafunktio.

Oikea kuvaaja: Eri muotoisten E-moodi polarisaation skalaari-ikkunafunktioiden suhdekuvaaja prosenteissa.

Sininen käyrä: GRASP-keiloista lasketun ikkunafunktion ja pyöreistä gaussisista keiloista lasketun ikkunafunktion suhde.

Vihreä käyrä: Elliptisistä keiloista lasketun ikkunafunktion ja pyöreistä gaussisista keiloista lasketun ikkunafunktion suhde. Lähde: [37].

Jotta $T - P$ vuodosta aiheutuva efekti saadaan eroteltua ikkunafunktioista, joiden avulla taivaansignaali rekonstruoidaan, voidaan harmonisessa avaruudessa määritellä *matriisi-ikkunafunktio*. Tämä matriisi-ikkunafunktio on kehitetty Helsingin yliopiston Planck-ryhmän yhteistyönä uudelleenlaiseksi ikkunafunktioiden malliksi, jonka teoreettisen osuuden laati akatemitutkija Elina Keihänen. Tässä yhteydessä on selkeyden vuoksi tärkeää lyhyesti eritellä kolme toisistaan poikkeavaa kulmatehospektriä:

Teoreettinen kulmatehospektri C_ℓ : Teoreettinen kulmatehospektri määriteltiin jo aiemmin luvussa 2.5.2.

Havaittu kulmatehospektri \hat{C}_ℓ : Satelliitin tai vastaavan instrumentin havaitsema taivaan kulmatehospektri, jossa on mukana instrumentin skannausstrategiasta ja optiikasta aiheutuvat efektit, joita ikkunafunktiot efektiivisesti kuvaavat. Tässä tutkielmassa havaitulle kulmatehospektrille käytetään yläpuolisena tarkkeena sirkumfleksiä (\sim).

Taivaan kulmatehospektri \tilde{C}_ℓ : Taivaan kulmatehospektrissä ei ole mukana instrumenteista tai skannausstrategiasta aiheutuvia efektejä. Tässä tutkielmassa taivaan kulmatehospektrille käytetään yläpuolisena tarkkeena tildeä (\sim) erotuksena muista kulmatehospektreistä. Havaittu kulmatehospektri eroaa taivaan kulmatehospektristä vain kulmatehospekttriä kertovalla ikkunafunktiolla.

2

Matriisi-ikkunafunktio voidaan määritellä lähtemällä liikkeelle kahdesta oletuksesta: 1) laskettaessa palloharmonisten kertoimien $a_{\ell m}$ tuloja, eri multipolit eivät sekoitu keskenään, mutta saman multipolin eri $a_{\ell m}$:t voivat sekoittua - jokaista havaittua $\hat{a}_{\ell m}$:ää vastaa saman multipolin taivaan $\tilde{a}_{\ell m}$, mutta m' ja m voivat poiketa toisistaan - ja 2) havaitut $\hat{a}_{\ell m}$ -kertoimet kytkeytyvät lineaarisesti taivaan $\tilde{a}_{\ell m}$ -kertoimiin seuraavasti

$$\hat{a}_{\ell m}^X = \sum_{m' X'} K_{\ell X X'}^{mm'} \tilde{a}_{\ell m'}^{X'}, \quad (3.14)$$

missä $X = T, E, B$, ja $K_{\ell X X'}^{mm'}$ kuvaa (kompleksista) kytkentämatriisia, joka kytkee lineaarisesti eri m :n arvot, ja T :n E :n ja B :n toisiinsa. Sijoittamalla taivaan $\tilde{a}_{\ell m}$ -kertoimet kaavasta (3.14) havaitun kulmatehospektrin määritelmään, seuraa

$$\begin{aligned} \hat{C}_\ell^{XY} &\equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \hat{a}_{\ell m}^X \hat{a}_{\ell m}^{Y*} \\ &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \sum_{m' X'} \sum_{m'' Y'} K_{\ell X X'}^{mm'} K_{\ell Y Y'}^{mm''*} \tilde{a}_{\ell m'}^{X'} \tilde{a}_{\ell m''}^{Y'*}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

missä $Y = T, E, B$. Kaava (3.15) kertoo, miten yksittäinen havaittu kulmatehospektri \hat{C}_ℓ riippuu yksittäisen taivaan $\tilde{a}_{\ell m}$ -kertoimista, mutta koska tämä halutaan kytkeä kaavan teoreettiseen kulmatehospektriin $C_\ell^{X'Y'}$, joka riippuu suuresta joukosta taivaan kulmatehospektrejä ($C_\ell = \langle \tilde{C}_\ell \rangle$),

²Itse asiassa luvun 2.5.2 yhteydessä mainittu havaittu kulmatehospektri on tässä taivaan kulmatehospektri, mutta sekä \hat{C}_ℓ että \tilde{C}_ℓ voidaan määritellä kaavasta 2.52.

lasketaan odotusarvo kaavan (3.15) yli. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\langle \hat{C}_\ell^{XY} \rangle &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \sum_{m'X'} \sum_{m''Y'} K_{\ell XX'}^{mm'} K_{\ell YY'}^{mm''*} \langle \tilde{a}_{\ell m}^{X'} \tilde{a}_{\ell m''}^{Y'*} \rangle \\
&= \frac{1}{2\ell+1} \sum_{mm''} \sum_{X'Y'} K_{\ell XX'}^{mm'} K_{\ell YY'}^{mm''*} C_\ell^{X'Y'} \\
&= \sum_{X'Y'} W_{\ell X'Y'}^{XY} C_\ell^{X'Y'},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

missä matriisi-ikkunafunktio on määritelty $W_{\ell X'Y'}^{XY} = \sum_{mm''} K_{\ell XX'}^{mm'} K_{\ell YY'}^{mm''*}$. Lisäksi on oletettu, että taivaan palloharmonisten funktioiden vakiokertoimet $\tilde{a}_{\ell m}$ ovat toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia eli $\langle \tilde{a}_{\ell m}^{X'} \tilde{a}_{\ell m''}^{Y'*} \rangle = C_\ell^{X'Y'} \delta_{m'm''}$, missä $\delta_{m'm''}$ on Kroneckerin delta. Ylläesitetystä kaavasta (3.16) nähdään, että myös havaitut kulmatehospektrit riippuvat lineaarisesti taivaan kulmatehospektreistä, eli havaituille komponentin u kulmatehospektreille \hat{C}_ℓ^u pätee relaatio

$$\hat{C}_\ell^u = \sum_{u'} W_\ell^{uu'} C_\ell^{u'}, \tag{3.17}$$

missä $u, u' = TT, EE, BB, TE, TB, EB$. Tässä tutkielmassa käytetään todellisiin havaintoihin perustuvaa oletusta, jonka mukaan maailmankaikkeutemme syntyi gaussisista satunnaisprosesseista. Tällöin taustasäteilyn signaalissa ei oleteta esiintyvän TB ja EB välisiä korrelaatioita, mutta koska mallin oletetaan toimivan myös etualan säteilylle, joka voi sisältää kyseisiä korrelaatioita, otetaan täydellisyyden vuoksi kaikki kuusi termiä huomioon.

Matriisimuodossa kaava (3.17) voidaan kirjoittaa

$$\hat{C}_\ell = W_\ell C_\ell, \tag{3.18}$$

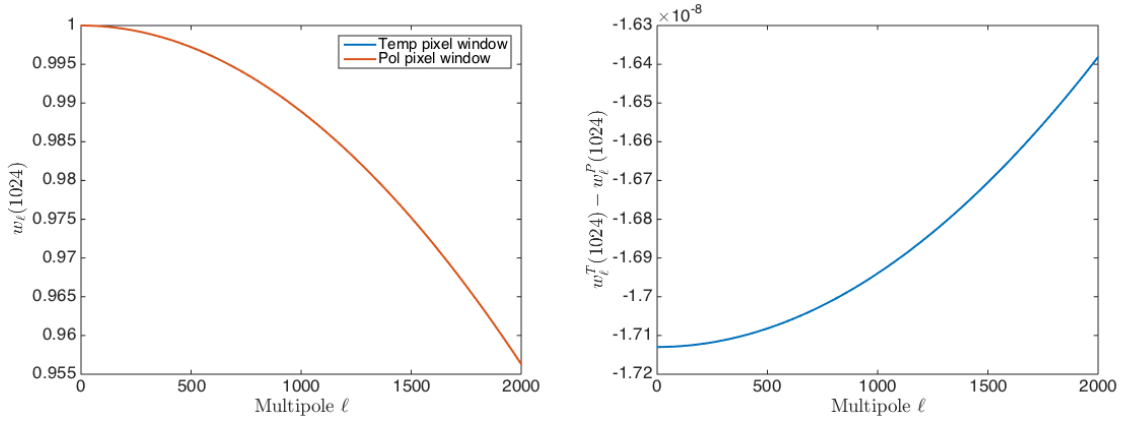
missä \hat{C}_ℓ ja C_ℓ ovat 6×1 vektoreita ja W_ℓ on 6×6 matriisi, joka aukikirjoitettuna on

$$W_\ell = \begin{pmatrix} W_\ell^{TT,TT} & W_\ell^{TT,EE} & W_\ell^{TT,BB} & W_\ell^{TT,TE} & W_\ell^{TT,TB} & W_\ell^{TT,EB} \\ W_\ell^{EE,TT} & W_\ell^{EE,EE} & W_\ell^{EE,BB} & W_\ell^{EE,TE} & W_\ell^{EE,TB} & W_\ell^{EE,EB} \\ W_\ell^{BB,TT} & W_\ell^{BB,EE} & W_\ell^{BB,BB} & W_\ell^{BB,TE} & W_\ell^{BB,TB} & W_\ell^{BB,EB} \\ W_\ell^{TE,TT} & W_\ell^{TE,EE} & W_\ell^{TE,BB} & W_\ell^{TE,TE} & W_\ell^{TE,TB} & W_\ell^{TE,EB} \\ W_\ell^{TB,TT} & W_\ell^{TB,EE} & W_\ell^{TB,BB} & W_\ell^{TB,TE} & W_\ell^{TB,TB} & W_\ell^{TB,EB} \\ W_\ell^{EB,TT} & W_\ell^{EB,EE} & W_\ell^{EB,BB} & W_\ell^{EB,TE} & W_\ell^{EB,TB} & W_\ell^{EB,EB} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

missä diagonaalilla sijaitsevat vuotokorjatut TT, EE, BB, TE, TB ja EB ikkunafunktiot ja ei-diagonaalilla vuotoelementit. Matriisin indeksit kertovat, mistä komponentista signaalia vuotaa mihin, esimerkiksi $W_\ell^{TT,EE}$ kuvaa vuotoa EE:stä TT:hen.

3.4 Pikseli-ikkunafunktiot

Taustasäteilyn lämpötilakartassa jokaista pikseliä vastaa tietty lämpötila, joka on pikselin pinta-alan yli lasketun todellisen lämpötilakentän keskiarvo. Samanlainen kentän keskiarvoistaminen pätee myös taustasäteilyn polarisaatiokartoille. Siispä, yksittäinen pikseli toimii, analogisesti keilan tapaan, ikkunana, joka tasoittaa varsinaista lämpötilan tai polarisaation kenttää. Kuten keilojen profilit, myös pikselit voidaan esittää harmonisessa avaruudessa ikkunafunktiona. Kuvassa



(a) Lämpötilan ja polarisaation pikseli-ikkunafunktiot, kun Nside=1024. (b) Lämpötilan ja polarisaation pikseli-ikkunafunktioiden erotus, kun Nside=1024.

Kuva 3.10: Kuvassa (a) on esitetty tässä tutkielmassa käytetyt lämpötilan ja polarisaation pikseli-ikkunafunktiot kuvattuna $\ell = 1700$ asti. Kuvassa (b) on esitetty näiden erotus. Koska tämä erotus on suuruusluokkaa 10^{-8} , näkyvät kuvan (a) kaksi käyrää päällekkäin.

3.10 (a) näkyvät tässä tutkielmassa käytetyt lämpötilan ja polarisaation pikseli-ikkunafunktiot esitettynä $\ell = 2000$ asti ja kuvassa 3.10 (b) on esitetty näiden erotus.

Pikseli-ikkunafunktiot halutaan poistaa havaituista kulmatehospektreistä, sillä ne tasoittavat todellisia kulmatehospektrejä. Oletetaan jatkossa, että yksittäisen pikselin pinta-ala on Ω_{pix} ja merkitään kartassa olevien pikseleiden määrää N_{pix} . Tällöin pikselöity signaali $f(p)$ voidaan esittää varsinaisen signaalin yli laskettuna keskiarvona pikselissä $p \in [0, N_{pix} - 1]$ seuraavasti [47]

$$f(p) = \int d\mathbf{n} w_p(\mathbf{n}) f(\mathbf{n}), \quad (3.20)$$

missä $\mathbf{n} = (\theta, \varphi)$ kuvaa joukkoa pallokoordinaatteja, jotka kattavat pikselin p pinta-alan. Pikselin painokerroin w_p on pikselin sisällä $w_p(\mathbf{n}) = 1/\Omega_{pix}$ ja tämän ulkopuolella nolla, jolloin $\int d\mathbf{n} w_p(\mathbf{n}) = 1$. Kehittämällä ylempi yhtälö erikseen lämpötilan ja polarisaation multipoliekspansioiksi tiettyyn ℓ_{max} arvoon asti, saadaan pikselöidyn signaalin multipoliekspansioiksi

$$\begin{aligned} T(p) &= \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_m a_{\ell m}^T w_{\ell m}^T(p), \\ E(p) &= \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \sum_m a_{\ell m}^E w_{\ell m}^E(p), \\ B(p) &= \sum_{\ell=2}^{\ell_{max}} \sum_m a_{\ell m}^B w_{\ell m}^B(p), \end{aligned} \quad (3.21)$$

missä

$$w_{\ell m}^X = \int d\mathbf{n} w_p(\mathbf{n})^X Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad (3.22)$$

on pikselin p painokertoimen palloharmoninen muunnos ja $X = T, E, B$. Tarkemmin ottaen $w_{\ell m}$:ien oletetaan olevan polarisaation suhteen identtisiä eli $w_{\ell}^P \equiv w_{\ell m}^E = w_{\ell m}^B$. Yhtälön (3.22) pik-

seleiden painokertoimien $w_{\ell m}^X$ käsittely eksaktisti tässä tutkielmassa käytetyssä kartan HEALPix-pikselisaatiossa on laskennallisesti erittäin raskasta, joten painokertoimen käsittelyn yksinkertaistamista tarvitaan. Mikäli pikselin koko on pieni suhteessa keilojen kokoon, voidaan pikselin sisäinen rakenne unohtaa ja olettaa, että

$$w_{\ell m}^X(p) = w_\ell^X(p)Y_{\ell m}(p), \quad (3.23)$$

missä $w_\ell^X(p)$ on ikkunafunktio, joka on laskettu indeksin m keskiarvon yli

$$w_\ell^X(p) = \left(\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |w_{\ell m}^X(p)|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.24)$$

joka on riippumaton pikselin sijainnista taivaan kartassa. Varsinainen (efektiivinen) pikseli-ikkunafunktio w_ℓ^X määritellään $w_\ell^X(p)$:n neliöllisenä keskiarvona

$$w_\ell^X \equiv \left(\frac{1}{N_{pix}} \sum_{p=0}^{N_{pix}-1} (w_\ell^X(p))^2 \right)^{1/2}. \quad (3.25)$$

Edellä kuvatuista yhtälöistä (2.45), (2.52), (2.62), (3.20) ja (3.21) seuraa, että pikselöidyn ja pikselöimättömän signaalin havaitulle kulmatehospektreille pätee

$$\hat{C}_\ell^{XY}(unpix) = \frac{1}{w_\ell^X w_\ell^Y} \hat{C}_\ell^{XY}(pix), \quad (3.26)$$

missä $X, Y = T, E$. Tästä seuraa, että pikseli-ikkunafunktion vaikutus keilojen skalaari- ja matriisi-ikkunafunktioihin on skalaari-ikkunafunktioille muotoa

$$W_\ell^{XY}(unpix) = \frac{1}{w_\ell^X w_\ell^Y} W_\ell^{XY}(pix), \quad (3.27)$$

missä $X = Y = T, E$ ja matriisi-ikkunafunktioille muotoa

$$W_\ell^{uu'}(unpix) = \frac{1}{w_\ell^X w_\ell^Y} W_\ell^{uu'}(pix), \quad (3.28)$$

missä $u, u' = TT, EE, BB, TE, TB, EB$. Yhtälön (3.28) pikseli-ikkunafunktioiden indeksit X ja Y määräytyvät u :n mukaan. Jos $u = TT$, niin $X = Y = T$, jos $u = EE, BB$, niin $X = Y = P$ tai jos $u = TE, TB, EB$, niin $X = T, Y = P$. Yhtälöiden (3.27) ja (3.28) $W_\ell(unpix)$ ikkunafunktiot ovat nyt riippumattomia kartan pikselisaatiosta, joten ne soveltuvat käytettäväksi esimerkiksi eri resoluutioisten karttojen kulmatehospektrien arvioimiseen.

Tavallisesti kartanteko toteutetaan resoluutioparametrin arvolla $N_{side} = 1024$ (kartanteosta lisää luvussa 4), mutta pikseli-ikkunafunktiot on laskettu tarkasti yhtälöistä (3.24) ja (3.25) vain tapauksille $N_{side} \leq 128$. Kun $N_{side} > 128$, on pikseli-ikkunafunktioiden tarkka laskeminen jokaiselle ℓ :n arvolle laskentaresurssien kannalta liian kallista. Tällöin lämpötilan pikseli-ikkunafunktio on ekstrapoloitu tapauksesta $N_{side} = 128$ olettamalla, että multipolit ℓ skaalautuvat, kuten laatikkomaisen pikseli-ikkunafunktion ℓ :t. Polarisaation pikseli-ikkunafunktio oletetaan verrannolliseksi lämpötilan pikseli-ikkunafunktioon siten, että verrannollisuuserroin määräytyy matalien multipolien w_ℓ :n tarkasta laskennasta.

3.5 Havaitun signaalin mallintaminen - signaalin ja keilojen konvoluutio

Koska minkä tahansa instrumentin, kuten silmän, kameran tai Planckin torven tai detektorin, havaitsema signaali on aina konvoluutio instrumentista aiheutuvien efektien ja todellisen signaalin välillä, täytyy havaitun signaalin mallintamiseksi taivaiden $a_{\ell m}$ -kertoimet konvoloida satelliitin havaintokeiloilla. Kuten jo luvussa 3.2 mainittiin, konvoluutio keilan ja signaalin välille voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tilde{T}(\mathbf{n}_0, \psi) = \sum_{\ell m} b_{\ell m}^* (\mathbf{n}_0, \psi) a_{\ell m}. \quad (3.29)$$

Yhdistämällä ylempään yhtälöön yhtälö (3.5), saadaan

$$\tilde{T}(\mathbf{n}_0, \psi) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{mm'=-\ell}^{\ell} b_{\ell m'}^* a_{\ell m} D_{mm'}^{\ell*}(\mathbf{n}_0, \psi), \quad (3.30)$$

missä $b_{\ell m}$ kuvaa keilan palloharmonisia kertoimia referenssisuunnassa ja -orientaatiassa. Tässä on myös oletettu sekä keilan että taivaan olevan kaistarajoitettuja johonkin korkeaan ℓ_{max} . Käyttämällä sekä Wignerin D-funktioiden määritelmää

$$D_{mm'}^{\ell}(\varphi_0, \theta_0, \psi) = e^{-im\varphi_0} d_{mm'}^{\ell}(\theta_0) e^{-im'\psi} \quad (3.31)$$

että relaatiota

$$D_{mm'}^{\ell}(\varphi_0, \theta_0, \psi) = \sum_{m''=-\ell}^{\ell} d_{mm''}^{\ell}(\pi/2) d_{m''m'}^{\ell}(\pi/2) e^{-i(m\varphi_0+m''\theta_0+m'\psi)}, \quad (3.32)$$

voidaan havaittu lämpötila $\tilde{T}(\varphi_0, \theta_0, \psi)$ ilmaista harmonisessa avaruudessa muodossa

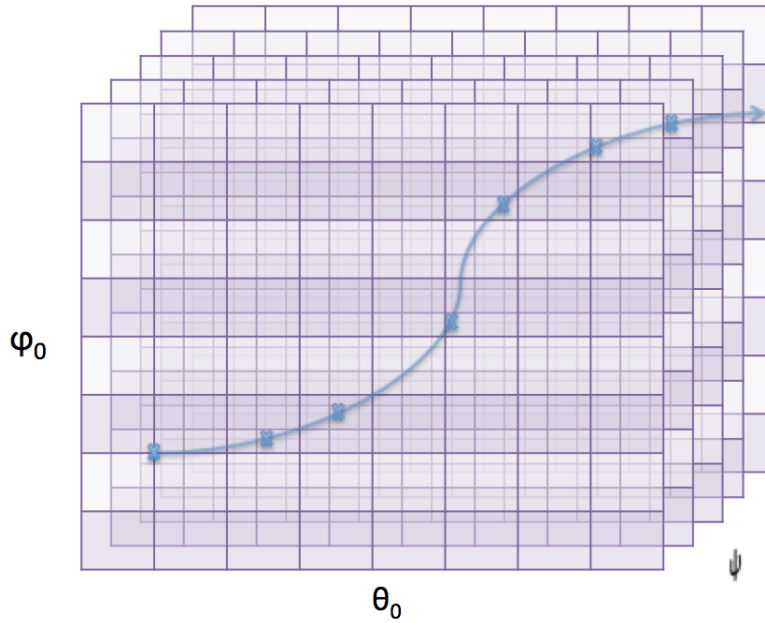
$$\tilde{T}(\varphi_0, \theta_0, \psi) = \sum_{m, m'', m'=-\ell_{max}}^{\ell_{max}} T_{mm''m'} e^{i(m\varphi_0+m''\theta_0+m'\psi)}. \quad (3.33)$$

Tässä $d_{mm'}^{\ell}$ kuvaa redusoituja Wignerin matriiseja ja $T_{mm''m'}$ on havaitun lämpötilakentän $\tilde{T}(\varphi_0, \theta_0, \psi)$ palloharmoninen esitys

$$T_{mm''m'} = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} b_{\ell m'}^* a_{\ell m} d_{mm''}^{\ell}(\pi/2) d_{m''m'}^{\ell}(\pi/2). \quad (3.34)$$

Mikäli keila on vain hieman epäsymmetrinen, voidaan myös m :n arvot rajoittaa sopivalle välille $(-m_{max}, m_{max})$, kunhan $m_{max} \ll \ell_{max}$.

Valitsemalla sopiva m_{max} ja tarpeeksi suuri ℓ_{max} , voidaan kaavojen (3.33) ja (3.34) avulla rakentaa jokaiselle detektorille ja Stokesin parametrille I, Q ja U interpolaatiotaulukko, joka kuvaa detektorin havaittua intensiteettiä tai polarisaatiota kaikilla keilan eri suunnilla (θ, φ) ja orientaatioilla ψ . Tämän taulukon tiheysväli on sitä tiheämpi, mitä suurempia ℓ_{max} ja m_{max} ovat. Kun detektorien katselusuunnat tiedetään eri taivaan pisteissä, voidaan valita sopivan kertaluvun polynomifunktio, joka sovitetaan kulkemaan detektorin katselusuunnan koordinaattipisteiden ja näiden pisteiden lähiympäristössä olevien interpolaatiotaulukon pisteiden kautta (katso kuva 3.11).



Kuva 3.11: Yksittäisen detektorin interpolaatiotaulukko keilan erilaisilla asennoilla $\mathbf{n}_0 = (\theta_0, \varphi_0)$ ja orientaatioilla ψ . Käyrä, joka kulkee taulukon halki kuvaa detektorin varsinaista skannausreittiä. Kuvan siniset ruksit ovat niitä taulukon arvoja (Stokesin parametreja I,Q,U), joiden kautta skannausreittiä kuvaava polynomifunktio on sovitettu kulkemaan.

Sovituksen intensiteetit ja polarisaatiot ovat vielä tässä vaiheessa ajasta riippumattomia. Kun tähän yhdistetään tieto satelliitin skannausstrategiasta, eli milloin kukin detektori on katsellut tiettyyn taivaan koordinaatin suuntaan, voidaan simuloida detektoreilla havaittua intensiteettiä ja polarisaatioita ajan funktiona. Tämä on tapana esittää aikajärjestettynä datana (TOD), joka voidaan projisoida erikseen lämpötilan ja polarisaation taivaankartoiksi.

Luku 4

Kartanteko aikajärjestetystä datasta

Planck-satelliitin skannatessa taivasta sen detektoreihin saapuvat erilaisilla energioilla etenevät fotonit, jotka satelliitti mittaa jännite-eroina nollatasosta. Niinpä jokaiselle taivaan pisteelle on olemassa kyseisestä pisteestä havaittu jännite. Satelliitin raakadata, joka on vastaanotettu Maahan, onkin vain jännite ajan funktiona, jota kutsutaan myös aikajärjestetyksi dataksi (engl. Time Ordered Data, TOD). Jotta tästä raakadatasta, joka koostuu sekä signaalista että detektorien kohinasta, saadaan irti kosmologian kannalta oleellista informaatiota, kalibroidaan se sekä Aurinkokunnan että satelliitin liikkeestä aiheutuvan Doppler-efektin avulla, mikä projisoituna kartaksi muodostaa dipolirakenteen, josta on kerrottu enemmän luvussa 2.5.1. Kuitenkin, koska dipolilla kalibroidun datan määrä on Planck-satelliitilla valtava, jokaista Planckin detektoria kohden noin 10^{10} näytettä vuodessa [3], on tämä data saatava kompressoitua sen jälkikäsitteilyä varten tavalla, joka hävittää mahdollisimman vähän informaatiota. Niinpä kartanteko on järkevä esitystapa raakadatalle, sillä se kompressoii datan, oikein tehtynä säilyttää mahdollisimman paljon kosmologista informaatiota datasta, ja lisäksi visualisoi sen. Ongelmaa, millä tavoin data, ja erityisesti kohina, tulisi kompressoida karttatasolla kutsutaan kartanteko-ongelmaksi, jota käsitellään seuraavaksi.

4.1 Kartanteko-ongelma

Oletetaan, että aikajärjestetty data voidaan esittää vektorina \mathbf{y} , joka riippuu lineaarisesti taivaan signaalista \mathbf{s} ja instrumenttikohinasta \mathbf{n}

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n}. \quad (4.1)$$

Signaalivektori voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\mathbf{m}, \quad (4.2)$$

missä vektori \mathbf{m} kuvaa pikselöityä taivaan karttaa, joka koostuu N_{pix} tai $3N_{pix}$ määrästä pikseleitä riippuen siitä, esitetäänkö kartta pelkkänä lämpötilan vai lämpötilan ja polarisaation karttana. Taivaan signaali voidaan siis esittää vektorina, joka sisältää diskreetin määrän toisistaan poikkeavia arvoja, ja tämä määrä vastaa kartan pikseleitä. Signaalilla on olemassa oma vakioarvo jokaisessa pikselissä, mikä puolestaan viittaa siihen, että kartan pikseleiden on oltava tarpeeksi pieniä suhteessa detektorin keilan eli instrumenttikeilan kokoon, jotta tämä oletus on voimassa.

Planck-projektissa kartat on tapana esittää HEALPix-pikselisaatiassa [47] resoluutioparametrin N_{side} avulla, jonka yhteys kartassa olevien pikseleiden määrään on $N_{pix} = 12N_{side}^2$. Myös tämän tutkielman kartat ovat esitetty kyseisessä pikselisaatiassa.

Lämpötilakartalle jokaista pikselin arvoa vastaa oma Stokesin parametri I sekä polarisaatio-kartoille Q että U . Ottamalla kartanteossa polarisaatio huomioon, voidaan näytteen i havaittu signaali s_i kirjoittaa muodossa

$$s_i = I_i + Q_i \cos(2\psi_i) + U_i \sin(2\psi_i), \quad (4.3)$$

missä ψ_i on suunta, jossa detektorit ovat herkkiä polarisaatiolle. Tämä suunta vaihtelee sekä satelliitin sen hetkisen orientaation että polttotasossa olevien detektorien orientaation mukaan. Kertoimet $1, \cos(2\psi_i), \sin(2\psi_i)$ muodostavat kaavan 4.2 pointing-matriisin, \mathbf{P} . Se esittää satelliitin skannausstrategiaa ja siten kytkee signaalinäytteen s_i tulevan signaalin taivaan pikselistä p_i . Mikäli polarisaatiota ei huomioida (kosini- ja sinitermit kaavassa 4.3 häviävät), ei pointing-matriisi sisällä tietoa polarisaatioherkkyyden asennosta. Yhtälöstä 4.3 nähdään, että pointing-matriisin P on oltava erittäin harva. Jokainen matriisin rivi sisältää joko yhden tai kolme nollasta poikkeavaa arvoa riippuen siitä halutaanko detektorin polarisaatio huomioida.

Yllä esitetyt oletukset viittaavat siihen, ettei kartanteossa korjata instrumenttikeilaa dekonvoluutiolla. Symmetrisen keilan tapauksessa kartta tulee tällöin tasoitettua (smoothattua) kyseisen keilan koolla. Epäsymmetrisellä keilalla puolestaan kartan efektiivinen tasoittaminen riippuu keilan asennosta. Kartan tasoittaminen tietyssä pisteessä riippuu detektorien orientaatiosta, jossa ne ovat ohittaneet kyseisen pisteen taivaalla. Mikäli detektori on käynyt läpi kaikki taivaan pisteet tasaisesti jakautuen ja kaikilla keilan orientaatioilla, silloin kartan efektiivinen tasoitus palautuu symmetrisen keilan tapaukseen. Mikään detektori Planckin epähomogeenisella skannausstrategialla ei kuitenkaan käy läpi kaikkia keilan orientaatioita.

Tarkastellaan seuraavaksi kaavan 4.1 kohinatermiä. Kartanteossa tämän tilastolliset ominaisuudet aikatasossa oletetaan tunnetuiksi. Sopivasta kohinamallista kohinalle voidaan siis luoda joukko kohinakarttoja, joista kohinan tilastolliset ominaisuudet voidaan karttatasossa laskea. Tästä eteenpäin oletetaan kohina gaussiseksi, jonka odotusarvo on nolla ja kovarianssi \mathbf{N}

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^T \rangle &= \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

missä $\langle \cdot \rangle$ esittää odotusarvoa eri kohinarealisaatioiden yli. Tavallisesti kohinan tilastolliset ominaisuudet oletetaan ajan suhteen stationaarisiksi. Stationaarisuuden vuoksi kohina voidaan esittää korrelaatiofunktiona aikatasossa tai vaihtoehtoisesti tehospektrinä taajuustasossa.

Kartanteon ideana on siis antaa mahdollisimman tarkka estimaatti kartasta operoimalla jollain sopivalla lineaarisella operaattorilla \mathbf{L} datavektoriin \mathbf{y} eli $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{L}\mathbf{y}$. Optimaalisesti kartan ratkaiseminen voidaan esittää suurimman uskottavuuden estimaatin $\hat{\mathbf{m}}$ avulla, joka saadaan ratkaisemalla seuraava yleinen pienimmän neliösumman yhtälö [48]

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{y}. \quad (4.5)$$

Lineaarinen operaattori \mathbf{L} on tässä tapauksessa $(\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1}$. Sellaisille valtavan suurille resoluutiokartoilla, joita Planck-satelliitin datasta voidaan tehdä, on operaattorin \mathbf{L} laskeminen

lähes mahdotonta. Käytännössä kuitenkin iteratiivisilla menetelmillä yhtälö 4.5 on laskettavissa. Varsinainen Planckin matalan taajuuden instrumenttien kartanteko on toteutettu Helsingin yliopistolla kehitetyllä iteratiivisella Madam-koodilla (engl. **Map-making through Destripping for Anisotropy Measurements**), joka laskee TOD:sta kartat *destripping*-menetelmällä. Koska Madamia käytetään myös tämän tutkielman simuloitujen karttojen rakentamiseen, kuvaillaan seuraavaksi tätä Madamissa käytettyä menetelmää.

4.2 Kartan ratkaiseminen destripping-menetelmällä

Destripping [49–55] on approksimatiivinen menetelmä, jolla voidaan nopeasti ratkaista kartta siten, että yhtälö 4.5 on laskennallisesti kevyt ja ratkaisu on riittävän lähellä täydellisesti lasketun kartan ratkaisua. Destripping-menetelmässä yhtälön 4.1 kohinaosa jaetaan korreloituun kohinakomponenttiin \mathbf{n}_c ja valkoiseen kohinaan \mathbf{n}_w

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_c + \mathbf{n}_w, \quad (4.6)$$

missä korreloidun kohinan ($1/f$ -kohinan) osa voidaan esittää sopivissa vakiopätkissä. Aikajärjestykselle datalle tämä voidaan tehdä jakamalla data n_b osaan yhtä pitkiä pätkiä n_{base} eli $n = n_b n_{base}$, missä n kuvaa vektorin \mathbf{n}_c pituutta. Jokaiselle osalle määritellään vakiopoikkeama, josta kartanteossa käytetään nimitystä baseline. Nämä vakiopoikkeamat mallintavat siten matalan taajuuden korreloidun kohinan, joka halutaan poistaa varsinaisista kartoista. Korreloidulle kohinalle voidaan siten kirjoittaa esitys

$$\mathbf{n}_c = \mathbf{F}\mathbf{a}, \quad (4.7)$$

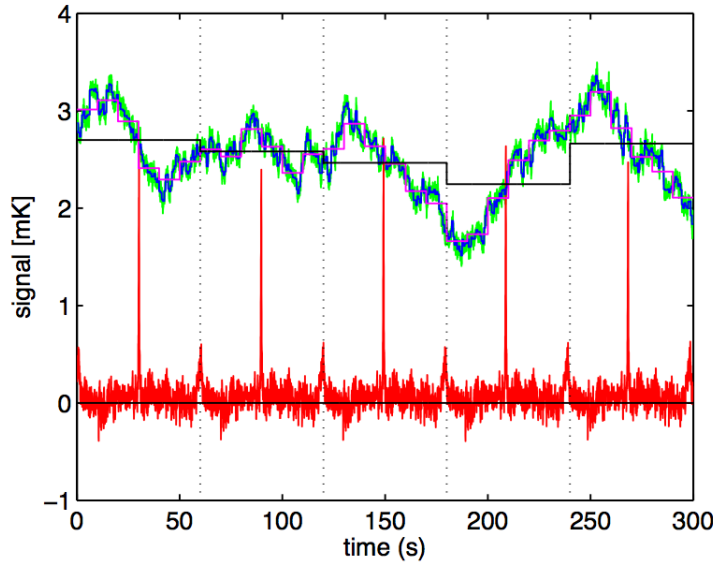
missä vektori \mathbf{a} sisältää tuntemattomat vakiopoikkeaman amplitudit ja $n_b \times n_{base}$ kokoinen matriisi \mathbf{F} kertoo, mihin kohtaan kukin amplitudi TOD:stä kuuluu. Kuvassa 4.1 on esitetty viiden minuutin pituinen pätkä simuloitua taustasäteilyn TOD:tä, jonka korreloituun kohinaan on sovitettu eri pituisia vakiopoikkeamia.

Olettamalla korreloitu kohina ja valkoinen kohina toisistaan riippumattomaksi, voidaan kokonaiskohinakovarianssimatriisi kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{N} = \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle = \mathbf{F}\mathbf{N}_a\mathbf{F}^T + \mathbf{N}_n, \quad (4.8)$$

missä $\mathbf{N}_n = \langle \mathbf{n}_w\mathbf{n}_w^T \rangle$ on valkoisen kohinan kovarianssimatriisi ja $\mathbf{N}_a = \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^T \rangle$ on amplitudien kovarianssimatriisi. Koska tavallisesti valkoisen kohinan kovarianssimatriisi tunnetaan, jää tehtäväksi ratkaista vain tuntemattomat amplitudit \mathbf{a} . Amplitudeja kuvaava matriisi \mathbf{N}_a voidaan kuitenkin esitietona, priorina, olettaa myös tunnetuksi, mikäli kohinaspektri tunnetaan. Tällöin \mathbf{N}_a :ta kutsutaan kohinaprioriksi.

Kohinapriori asettaa ylimääräisen rajoitteen, joka sallii destripping-menetelmän laajentamisen erittäin lyhyille vakiopoikkeamille. Kohinapriori voidaan rakentaa tunnettujen kohinaparametrien, polvitaajuuden, kohinaspektrin kaltevuuden ja valkoisen kohinan varianssin avulla [48], mutta, koska tämä tutkielma keskittyy puhtaasti signaalin simulaatioihin, näiden yksityiskohtaisempi kuvaileminen on tämän tutkielman ulkopuolella. Aiheesta kiinnostunut voi lukea instrumenttikohinan mallintamisesta taustasäteilyanalyysissä esimerkiksi vuonna 2014 julkaistusta Lindholmin tutkielmasta [56].



Kuva 4.1: Simuloitu viiden minuutin pätkä aikajärjestettyä dataa. Simuloitu korreloitu $1/f$ kohina on esitetty kuvassa vihreällä, johon on sovitettu yhden minuutin (mustalla), 10 sekunnin (pinkillä) ja 0.625 sekunnin (sinisellä) pituiset vakiopoikkeamat. Pystysuorat katkoviivat rajaavat satelliitin yhden minuutin pituisen skannausperiodin alun ja lopun. Varsinainen signaalin TOD on kuvassa punaisella käyrällä. Korkeat piikit signaalissa syntyvät, kun satelliitti skannaa Linnunradan tason. Lähde: [48].

Yllä kuvattujen oletusten mukaan, paras estimaatti vakiopoikkeamien vektorille $\hat{\mathbf{a}}$ voidaan nyt ratkaista lineaarisena yhtälöryhmänä [57]

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{F} + \mathbf{N}_a^{-1}) \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{y}, \quad (4.9)$$

missä

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}_n^{-1}. \quad (4.10)$$

Tässä \mathbf{I} esittää yksikkömatriisia ja \mathbf{N}_n on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalelementteinä ovat valkoisen kohinan varianssit σ_t^2 . Yhtälön (4.9) vakiopoikkeaman amplitudit voidaan ratkaista numeerisesti. Yksi ratkaisutapa on Madam-koodissakin käytetty konjugaattigradienntimenetelmä [58], sillä yhtälön (4.9) suluisissa oleva matriisi täyttää menetelmän ehdot – se on symmetrinen, reaaliarvoinen ja positiividefiniitti. Varsinainen suurimman uskottavuuden raidoista poistettu kartta (engl. destriped map) $\hat{\mathbf{m}}$ saadaan nyt yhtälöstä (4.5), kun datasta \mathbf{y} poistetaan korreloidun kohinan paras estimaatti $\hat{\mathbf{n}}_c = \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}$:

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}). \quad (4.11)$$

Katsotaan tarkemmin miten kaavan (4.11) eri operaatiot vaikuttavat datavektoriin \mathbf{y} ja unohtetaan tässä kohtaa vektori $\mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}$. Operaatiosta $\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1}$ saadaan (kohinainen) summakartta $\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{y}$,

jossa jokaista Stokesin parametria esittää tiettyyn pikseliin p osuneiden havaintojen summa

$$\begin{aligned} I_p &= \sum_{i \in p} \frac{1}{\sigma_i^2} y_i, \\ Q_p &= \sum_{i \in p} \frac{1}{\sigma_i^2} \cos(2\psi_i) y_i, \\ U_p &= \sum_{i \in p} \frac{1}{\sigma_i^2} \sin(2\psi_i) y_i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

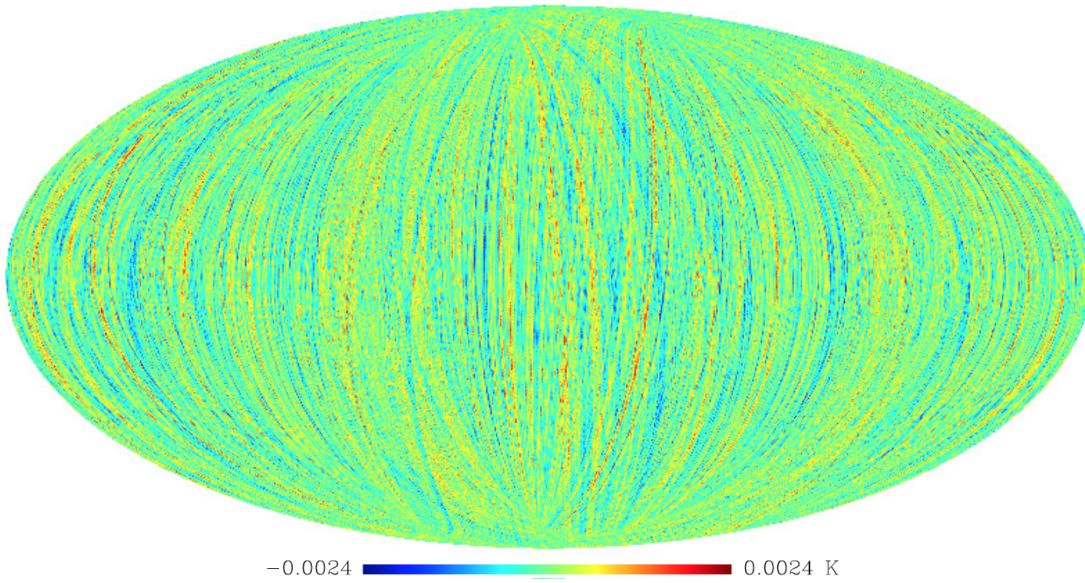
Tässä σ_i^2 esittää tietyn instrumentin valkoisen kohinan varianssia, joka tavallisesti voidaan olettaa yksittäisen detektorin osalta stationaariseksi eli $\sigma_i^2 = \sigma^2$. Summakartat eivät itsessään ole kovinkaan järkeviä, sillä jokaisessa summakartan pikselissä on summa kyseiseen pikseliin osuneista havainnoista. Järkevämpi mittari on siten kyseisten pikseleiden yli laskettu keskiarvo. Tämä keskiarvokartta saadaan laskettua operoimalla summakarttaa operaattorilla $(\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{P})^{-1}$, joka sisältää informaation montako havaintoa on tietyssä pikselissä. Keskiarvokartasta käytetään myös nimitystä *binnattu kartta*, joka nyt saadaan kaavasta

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}_w^{-1} \mathbf{y}. \quad (4.13)$$

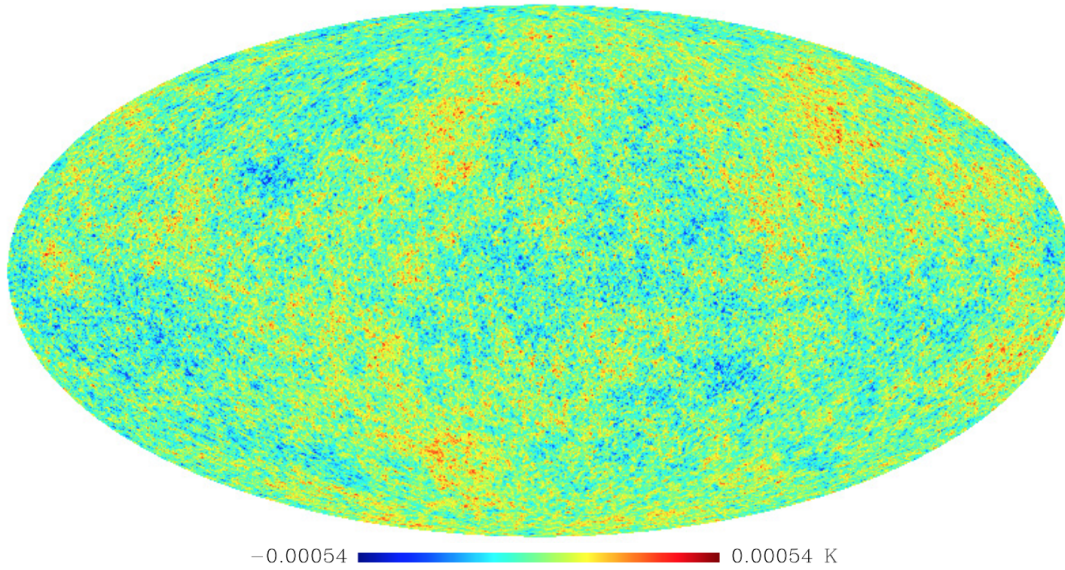
Varsinainen mittausdata sisältää taustasäteilysignaalin ja kohinan lisäksi etualan säteilyä. Tämä säteily tulee pääasiassa Linnunradan synkrotronisäteilystä, free-free säteilystä, Linnunradassa olevan pölyn infrapunasäteilystä, ja pienempi osuus tulee muiden galaksien säteilystä sekä kosmisesta infrapunasäteilystä. Koska tämä etualan säteilyn tehospektri eroaa joko lämpötilansa puolesta taustasäteilystä tai se ei ole mustan kappaleen säteilyä, voidaan karttatasolla etualan säteily erottaa taustasäteilystä, kun taivasta havaitaan usealla taajuuskanavalla yhtä aikaa. Näiden säteilykomponenttien erottelumenetelmä kartta-avaruudessa on tämän tutkielman ulkopuolella, mutta aiheesta kiinnostunut voi tutustua säteilylähteiden erottelumenetelmistä keskittyvään vuonna 2010 julkaistuun Sirviön tutkielmaan [59], jonka aiheena on taustasäteilyn analysoiminen.

Tiivistettynä, mikäli kartoissa oletetaan olevan korreloitua kohinaa, saadaan kohinaa vähennettyä tehokkaasti poistamalla raidat kartasta eli ratkaisemalla kaava (4.11). Toisaalta, mikäli kartoissa ei oleteta olevan korreloitua kohinaa, kuten pelkkää signaalia sisältävissä simulaatiokartoissa, on tavallisempaa ratkaista binnattu kartta eli kaava (4.13). Raidoista poistettu kartta ja binnattu kartta eivät kuitenkaan tällöin eroa merkittävästi toisistaan. Koska tämän tutkielman matriisi-ikkunafunktiot ovat laskettu puhtaan taustasäteilyn signaalisimulaatioista, ovat näiden simulaatioiden karttoina käytetty binnattuja taustasäteilyn karttoja. Kuvassa 4.2 on esitetty havainnollisuuden vuoksi raidoista poistettu taustasäteilyn kartta ja binnattu taustasäteilyn kartta, jotka on saatu puhtaan taustasäteilysignaalin simulaatioista.

Luvussa 3 esitetyt keilojen muodot vääristävät taustasäteilykarttoja ja saavat näin aikaan signaalivuotoa lämpötilan ja polarisaation karttojen välille. Jotta tästä vuodosta päästään eroon, voidaan keiloista aiheutuvat efektit poistaa joko dekonvoloimalla kartat karttatasossa tai harmonisessa avaruudessa (matriisi-)ikkunafunktiolla. Taustasäteilyanalyysin kannalta jälkimmäinen tapa on suositeltavampi, sillä kartan suora dekonvolointi vaikuttaa monimutkaisella tavalla kartassa olevan kohinan käyttäytymiseen.



(a) Simuloitu taustasäteilyn kartta, joka on saatu suoraan raakadatasta.



(b) Simuloitu, raidoista poistettu kartta.

Kuva 4.2: Kuvassa (a) suoraan kartaksi tehty sovitus simuloidusta raakadatasta. Kuvassa näkyy selvä raitamainen rakenne, mikä huonontaa taustasäteilyn kulmatchospektrin määrittämistä kartasta. Kuvassa (b) on esitetty samasta simulaatiosta tehty raidoista poistettu kartta. Kuvat: Anna-Stiina Suur-Uski.

Luku 5

Matriisi-ikkunafunktion simulaatiot

Luvussa 4 käsiteltiin, miten satelliitin mittaamasta (tai simuloidusta) aikajärjestetystä datasta saadaan lämpötilan ja polarisaation taivaankarttoja. Nämä taivaankartat sisältävät taustasäteilyn lämpötilan ja polarisaation signaalin, jolle voidaan kehittää harmonisessa avaruudessa multipoliekspansio, kuten luvussa 2.5.1 on esitetty. Tämän ekspansion $a_{\ell m}$ -kertoimista voidaan laskea havaittu kulmatehospektri, jossa satelliitin keilojen vaikutukset ovat mukana. Nämä vaikutukset, jotka harmonisessa avaruudessa on sisällytetty keilojen ikkunafunktioihin, tulisi saada poistettua, jotta taivaan kulmatehospektri saadaan selville. Keilojen ikkunafunktioita ei kuitenkaan voida Planckin kaltaiselle monimutkaiselle optiselle järjestelmälle selvittää tarkasti analyttisesti, joten taustasäteilyn simulaatioita tarvitaan niiden ratkaisemiseksi. Tässä yhteydessä voitaisiin simulaatioilla selvittää luvussa 3.2 esitetyt skalaari-ikkunafunktiot. Nämä kuitenkin sisältävät ei-toivottua signaalivuotoa eri komponenttien välillä, joka olisi tärkeää saada eristettyä omiksi komponenteikseen. Tämä voidaan toteuttaa luvussa 3.3 esitetyillä matriisi-ikkunafunktioilla, joiden matriisielementit saadaan arvioitua CMB Monte Carlo –simulaatioilla. Yhteensä tämän tutkielman simulaatiot kuluttivat noin 560 000 CPUh ja ne ajettiin 1728 ytimellä CSC:n *Sisu* Cray-XC30:llä.

5.1 CMB Monte Carlo –simulaatiot

Kuten luvussa 2.5.2 jo kerrottiin, teoreettinen kulmatehospektri C_ℓ määritellään odotusarvona yli suuren määrän satunnaisprosessissa syntyneiden $a_{\ell m}$ -kertoimien joukkoja, mutta todellisuudessa voimme havaita vain yhden joukon näistä kertoimista – oman havaittavan maailmankaikkeutemme $a_{\ell m}$ -kertoimet. Käytännössä minkä tahansa taustasäteilyn epäisotropioita kartoittavan satelliitin, kuten Planckin, datasta analysoidaan oman maailmankaikkeutemme $a_{\ell m}$ -kertoimet, sitä suuremmille multipolin ℓ arvoille selvitettyinä, mitä herkempi mittalaite on taustasäteilyn epäisotropioita mitannut. Näistä kertoimista voidaan laskea kaavan (2.52) avulla taivaan lämpötilan ja polarisaation kulmatehospektrit. Jotta taivaan kulmatehospektreistä saadaan selville matriisi-ikkunafunktion elementit, voidaan hyödyntää CMB Monte Carlo –simulaatioita.

CMB Monte Carlo –simulaatioissa teoreettisen kulmatehospektrin ympäriltä satunnaisotannalla generoidaan joukkoja $a_{\ell m}$ -kertoimia, joista kukin joukko vastaa yksittäistä taivaan realisaatiota, ja täten kullakin realisaatiolla on myös sille ominainen taivaan kulmatehospektri \tilde{C}_ℓ . Näin

tehtynä annettu teoreettinen kulmatehospektri toimii spektrien yli laskettuna odotusarvona, eli

$$C_\ell = \langle \tilde{C}_\ell \rangle. \quad (5.1)$$

Kaavassa (5.1) olevat taivaan realisaatioiden kulmatehospektrit, \tilde{C}_ℓ :t, vastaavat sellaisia kulmatehospektrejä, joissa satelliitin skannausstrategian ja keilojen välisiä vaikutuksia ei ole mukana. Havaittua signaalia voidaan simuloida tekemällä luvussa 3.5 esitetyllä tavalla signaalin $a_{\ell m}$ -kertoimille ja keilan $a_{\ell m}$ -kertoimille konvoluutiot jokaiselle Stokesin parametrille erikseen ja kirjoittamalla nämä kolmisarakkeiseksi interpolaatiotaulukoksi. Kun satelliitin detektorien polttotason geometria ja satelliitin skannausstrategia ovat tiedossa, voidaan interpolaatiotaulukon avulla selvittää simuloidut havaitut intensiteetit ja polarisaatiot satelliitin skannausreitillä ajan funktiona, mikä voidaan esittää aikajärjestettynä datana eli TOD:na. Nämä TOD:t voidaan projisoida, luvussa 4 esitetyllä tavalla, taivaankartoiksi. Taivaankartoista voidaan sitten laskea kullekin taivaalle ominainen havaittu kulmatehospektri \hat{C}_ℓ , josta keilojen vaikutus tulee poistaa jakamalla havaittu kulmatehospektri skalaari-ikkunafunktiolla (tai kertomalla se käänteisellä matriisi-ikkunafunktiolla), jotta varsinainen rekonstruoitu kulmatehospektri $\tilde{C}_\ell(reco)$ saadaan esiin.

Käytännössä ikkunafunktiot poikkeavat hieman eri realisaatioiden välillä, koska ne riippuvat eri realisaatioiden taivaan kulmatehospektreistä. Matriisi-ikkunafunktioista saadaan luotettavampia tuloksia, kun tehdään simulaatioita, joissa on suuri joukko realisaatioita. Tässä luvussa esitetyt matriisi-ikkunafunktiosimulaatioiden validoinnit on toteutettu 25 realisaatiolla (taivaan realisaatioilla 0000-0024) ja simulaatiot, joissa on erikseen tutkittu eri elementtien käyttäytymistä on tehty yhdellä taivaan realisaatiolla laskentaresurssien säästämiseksi. Tässä tutkielmassa simuloitu signaali on konvoloitu erikseen kolmella eri keilalla (pääkeilalla, läheisillä ja etäisillä sivukeiloilla) jokaiselle kolmelle LFI:n taaajuudelle. Taulukossa 5.1 näkyy konvoluutiossa ja interpolaatiossa käytetyt parametrit. Parametri `conv_lmax` kuvaa suurinta multipolia ℓ , johon asti havaittua signaalia mallinnetaan ja mallinnuksen tarkkuus heikkenee lähellä tätä multipolia. Tarkkuutta voidaan parantaa kasvattamalla parametreja `lmax_out` ja `interp_order`, joista ensimmäisellä parametrilla säädellään interpolaatiotaulukon spatiaalista tarkkuutta haluttuun $\ell_{max,out} \geq \ell_{max}$ asti laajentamalla taulukkoa lopusta ylimääräisillä nollilla (engl. zero-padding) ennen Fourier-muunnosta ja jälkimmäisellä parametrilla päätetään interpolaatiotaulukkoon sovitetun polynomifunktion kertaluku. Parametrilla `beammmx` säädellään mallinnettavan atsimuuttisuuntaisen rakenteen tarkkuutta.

Tässä tutkielmassa tehdyt simuloidut taivaankartat on tehty erikseen pääkeilojen, pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän ja koko keilan TOD:eille `Madam`-koodilla. `Madamia` varten on käytetty samoja parametriasetuksia kuin mitä on käytetty Planckin todellisille taivaankartoille, mitkä löytyvät vuoden 2015 LFI:n kartantekoa käsittelevästä Planck-julkaisusta [57]. Tällä tavoin on saatu kaikille kolmelle LFI:n taaajuudelle koko Planck-mission (4,5 vuoden) kattavat taivaankartat `HEALPix`-resoluutiolla $N_{side} = 1024$, joista on laskettu havaitut kulmatehospektrit \hat{C}_ℓ .

parametri	Pääkeila		Läheiset sivukeilat		Etäiset sivukeilat	
	30&44 GHz	70 GHz	30&44 GHz	70 GHz	30&44 GHz	70 GHz
conv_lmax	2048	2048	1000	1500	180	180
lmax_out	4096	4096	2000	3000	360	360
beammmax	9	9	18	18	180	180
interp_order	5	9	5	5	5	5

Taulukko 5.1: Simulaatioissa käytetyt konvoluution ja interpolaation parametrit eri keilan osille.

5.2 Matriisi-ikkunafunktion elementtien arvioiminen

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan matriisi-ikkunafunktion elementtien arvioimista CMB Monte Carlo –simulaatioilla. Havaittujen kulmatehospektrien autokorrelaatioista voidaan matriisi-ikkunafunktion elementit arvioida kaavalla

$$W_{\ell}^{uu'} = \frac{1}{w_{\ell}^X w_{\ell}^Y} \frac{\langle \hat{C}_{\ell}^u \rangle}{\langle \tilde{C}_{\ell}^{u'} \rangle}, \quad (5.2)$$

missä $\langle \rangle$ kuvaa odotusarvoa CMB Monte Carlo –realisaatioiden yli ja $u = TT, EE, BB, TE, TB, EB$, $u' = TT, EE, BB, X, Y = T, P$ ja w_{ℓ} on luvussa 3.4 esitelty, ja $N_{side} = 1024$ asti laskettu, pikseli-ikkunafunktio. Kaavassa (5.2) olisi todenmukaisempaa jakaa havaittujen kulmatehospektrien odotusarvot simulaatioon syötetyllä kulmatehospektrin mallilla $C_{\ell}(model)$. Kuitenkin tilastollisesti tämänkaltaisen formalismi pätee vain valtavan suurelle joukolle realisaatioita. Kaava (5.2) ei sellaisenaan päde taivaan signaalin ristikorrelaatioiden kulmatehospektreille ja selitys tähän annetaan alla.

Simulaatio-ongelma kulmatehospektrien ristikorrelaatioissa: Simulaatioiden kannalta pienehkön ongelman muodostaa kulmatehospektrien ristikorrelaatiot, sillä TE-ristikorrelaation kulmatehospektri voi tietyillä multipoleilla käydä nollassa. Tällöin näillä multipoleilla matriisi-ikkunafunktio olisi huonosti määritelty – kaavan (5.2) nimittäjässä olisi nolla.

Ratkaisu ongelmaan on käyttää simulaatioissa todenmukaisten kulmatehospektrien sijaan nolasta poikkeavia vakiospektrejä ristikorrelaatioille, sillä keskimäärin matriisi-ikkunafunktio ei määritelmänsä mukaan riipu simulaatioon syötetystä spektristä. Kuten luvussa 2.5.2 mainittiin, on taivaan kulmatehospektrien käyrät tapana kertoa tekijällä $\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi}$. Tällöin simulaatioiden kannalta on kätevämpää määritellä suoraan

$$\mathcal{D}_{\ell}^u = \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} \tilde{C}_{\ell}^u = \text{vakio}, \quad (5.3)$$

missä $u = TT, EE, BB, TE, TB, EB$. Tämän tutkielman matriisi-ikkunafunktion simulaatioihin valittiin kulmatehospektreiksi malliksi $\mathcal{D}_{\ell}^{TT,EE,BB} = 1000$ ja $\mathcal{D}_{\ell}^{TE,TB,EB} = 500$, jotta ristikorrelaatioiden osuus olisi puolet niitä vastaavista autokorrelaatioista. Taivaan kulmatehospektrit \tilde{C}_{ℓ}^u on tässä laskettu multipolista $\ell = 2$ multipoliin $\ell = 2048$ asti. Tässä olisi toki voinut olla toi-

senlainenkin ristikorrelaation osuus, koska kuten edellä mainittiin, matriisi-ikkunafunktiot eivät keskimäärin riipu syötetystä signaalista.

Kun edellä esitetty simulaatio-ongelma on saatu kierrettyä, voidaan seuraavaksi yhtälön (5.3) kulmatehospektrin ympäriltä satunnaisgeneroida joukko $a_{\ell m}^T$, $a_{\ell m}^E$ ja $a_{\ell m}^B$ -kertoimia, jolloin nollasta poikkeavat $\mathcal{D}_\ell^{TE, TB, EB}$:t synnyttävät korrelaatioita $a_{\ell m}$ -kertoimien välille. Nämä voidaan kirjoittaa kolmisarakkeiseksi taulukoksi. Yksittäinen matriisielementti $W_\ell^{uu'}$ voidaan rakentaa kolmella erillisellä simulaatiolla, joissa aina yksi taulukon sarake, $a_{\ell m}^T$, $a_{\ell m}^E$ tai $a_{\ell m}^B$, on asetettu nollasta poikkeavaksi ja kaksi muuta saraketta nollassi. Tällä tavoin saadaan simuloitua kolmella erillisellä simulaatiolla niin kutsuttuja T-, E- ja B-karttoja. Tässä T-kartta ei tarkoita, että kartassa olisi puhdasta lämpötilan signaalia, vaan se on saatu simulaatiosta, jossa vain $a_{\ell m}^T$ -kertoimet ovat olleet nollasta poikkeavia. Täten T-kartta sisältää juuri E-moodista ja B-moodista tulleen vuodon lämpötilaan.

Ristikorrelaatioita varten ei tarvitse tehdä erillisiä simulaatioita, sillä kahden eri komponenttikartan summakartan kulmatehospektristä voidaan laskea muihin komponentteihin tuleva kontribuutio. Esimerkiksi T-kartan ja E-kartan summakartan (T+E kartan) havaituista kulmatehospektristä saadaan laskettua TE-kontribuutio komponentteihin TT, EE, BB, TB, ja EB. Ristikorrelaatioiden kulmatehospektrejä laskettaessa on tosin huomattava, että koska kaksi komponenttikarttaa ovat keskenään korreloituneita, täytyy summakartan havaituista kulmatehospektristä vähentää vielä yksittäisten karttojen havaitut kulmatehospektrit. Kaavana tämä voidaan esittää

$$\hat{C}_\ell^u(XY \rightarrow u) = \hat{C}_\ell^u(XY \text{ summap}) - \hat{C}_\ell^u(X\text{-only}) - \hat{C}_\ell^u(Y\text{-only}), \quad (5.4)$$

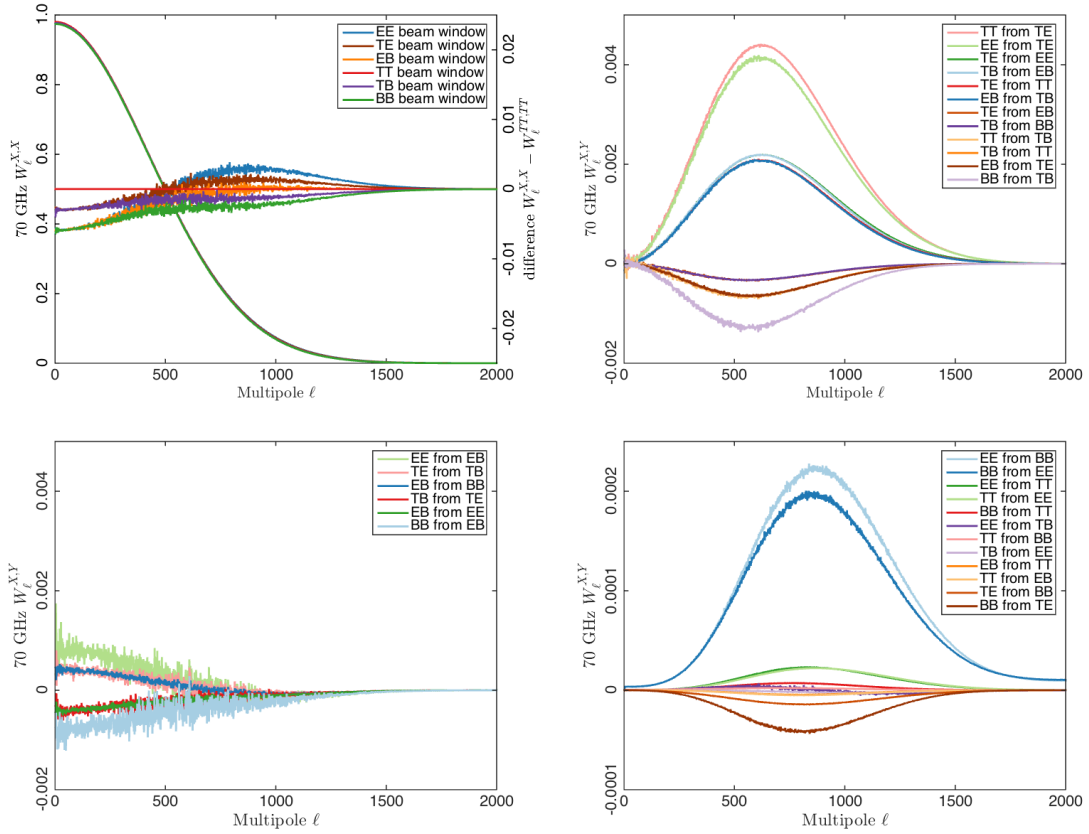
missä $\hat{C}_\ell^u(XY \rightarrow u)$ on ristikorrelaatiosta ($XY = TE, TB, EB$) tuleva vuoto komponentille u ja $\hat{C}_\ell^u(\text{summap})$ on summakartasta laskettu havaittu kulmatehospektri. Lisäksi $\hat{C}_\ell^u(X\text{-only})$ ja $\hat{C}_\ell^u(Y\text{-only})$, ($X \neq Y$; $X, Y = T, E, B$) ovat vain tiettyä signaalikomponenttia sisältävistä kartoista lasketut havaitut kulmatehospektrit. Esimerkiksi, mikäli simulaatioon olisi syötetty $\mathcal{D}_\ell^{TE} = 0$, olisi tällöin yhtälön (5.4) vasen puoli ollut nolla, eli TE:llä olisi ollut nollakontribuutio muihin komponentteihin. Kaavan (5.4) avulla voimme arvioida matriisi-ikkunafunktion TE-kontribuutiot ja jakamalla nämä yhtälön (3.28) mukaisesti pikseli-ikkunafunktioilla, saamme:

$$W_\ell^{u, XY} = \frac{1}{w_\ell^U w_\ell^V} \frac{\langle \hat{C}_\ell^u(XY \text{ summap}) - \hat{C}_\ell^u(X\text{-only}) - \hat{C}_\ell^u(Y\text{-only}) \rangle}{\langle \tilde{C}_\ell^{XY} \rangle}, \quad (5.5)$$

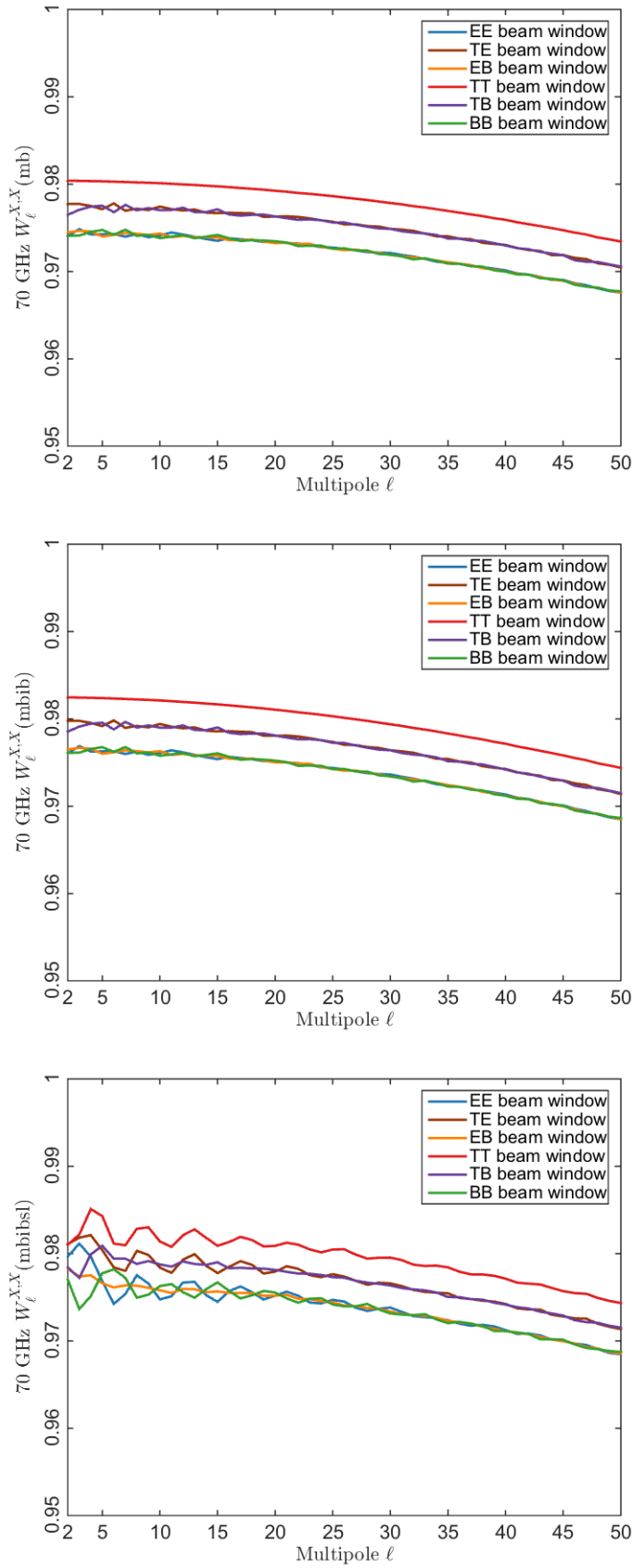
missä w_ℓ on pikseli-ikkunafunktio, $U, V = T, P$. Kuvassa 5.1 (liitteen kuvassa A.3) on esitetty 25:stä realisaatiosta lasketut 70 GHz:n matriisi-ikkunafunktioiden kuusi diagonaalelementtiä ensimmäisessä paneelissa ja 30 ei-diagonaalelementtiä kolmessa muussa paneelissa. Vastaavat kuvaajat 30 ja 44 GHz:lle löytyvät liitteiden kuvista A.1 ja A.2.

Kuvassa 5.2 (liitteen kuvassa A.6) on esitetty 70 GHz:n matalien multipolien ($\ell \leq 50$) matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit, jokaiselle komponentille sekä pääkeilalle, pääkeilan ja läheisen sivukeilan yhdistelmälle ja koko keilalle erikseen. Vastaavat kuvaajat 30 ja 44 GHz:lle löytyvät liitteiden kuvista A.4 ja A.5. Ikkunafunktioiden komponenttien korrelaatiot kulkevat siten, että ylimpänä kulkee lämpötilan ikkunafunktio, alempana lämpötilasta riippuvien ristikorrelaatioiden

TE:n ja TB:n ikkunafunktiot ja alimpana kulkee pelkästä polarisaatiosta riippuvien korrelaatioiden EE, BB ja EB ikkunafunktiot. Matalimmilla multipoleilla ($\ell \leq 20$) on havaittavissa erityisesti 30 ja 70 GHz:n osalta pientä heilahtelua, joka syntyy etäisen sivukeilan suuresta rakenteesta (katso kuva 3.7(b)). Lisäksi näistä kuvista nähdään, miten sivukeilojen huomioon ottaminen kasvattaa ikkunafunktion tehoa - sivukeilat nostavat ikkunafunktion arvot lähemmäksi ykköstä, kun $\ell = 0$.



Kuva 5.1: 70 GHz:n pääkeilasta lasketut matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit ensimmäisessä paneelissa ja ei-diagonaalelementit kolmessa muussa paneelissa. Kuvissa $X, Y = \text{TT}, \text{EE}, \text{BB}, \text{TE}, \text{TB}, \text{EB}$ ja $W_\ell^{X,Y}$ tarkoittavat vuotoa komponentista Y komponentille X. Koska diagonaalelementit ovat keskenään likimain yhtäsuuret, on ensimmäisessä paneelissa laskettu myös erokäyrät TT-komponenttiin nähden. Nämä erokäyrät kulkevat lähellä nollalinjaa, ja niiden asteikko näkyy ensimmäisen paneelin oikeassa reunassa. Ei-diagonaalelementit on jaoteltu kolmeen kategoriaan: Ne vuotokomponentit, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan keskivaiheilla ovat esitetty oikealla ylärivissä, ne komponentit, jotka ovat multipoliskaalassa suurimmillaan matalilla multipoleilla ovat esitetty vasemmalla alarivissä. Komponentit, jotka ovat pienimmillään koko multipoliskaalalla ovat esitetty oikealla alarivissä. Koska useimmat käyrät kulkevat päällekkäin, on käyrien selkeyttämiseksi kuvatekstien komponentit esitetty silmämääräisesti suuruusjärjestyksessä suurimmasta pienimpään.



Kuva 5.2: 70 GHz:n matriisi-ikkunafunktioiden diagonaalelementit esitettynä ensimmäiselle 50:lle multipolille. Ylimpänä matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit esitettynä pääkeilalle, keskellä diagonaalelementit esitettynä pääkeilan ja läheisen sivukeilan yhdistelmälle ja alimpana diagonaalelementit esitettynä koko keilalle.

5.3 Läheisten sivukeilojen vaikutus

Kun pääkeilan lisäksi simulaatioihin huomioidaan läheiset sivukeilat, eivät tulokset merkittävästi poikkea pelkästä pääkeilasta tehtyjen simulaatioiden tuloksista. Tämä onkin oletettavaa, sillä läheiset sivukeilat ovat lähes pääkeilan suuntaisia (määritelmänsä mukaan korkeintaan 5° päässä pääkeilan keskipisteestä), toisin kuin etäiset sivukeilat, jotka poikkeavat pääkeilasta lähes 90° .

Liitteen kuvissa A.7, A.8 ja A.9 on esitetty 30, 44 ja 70 GHz:n diagonaalelementeille pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän suhteet pääkeiloihin ja ei-diagonaalelementeille pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän erotukset pääkeiloihin. Ei-diagonaalelementeille erotus on järkevämpi mitta, koska jotkin komponentit vaihtavat etumerkkiään tietyillä multipoleilla, jolloin keilojen välinen suhde näiden multipolien lähiympäristössä olisi ollut epätarkka. Diagonaalelementeille läheisten sivukeilojen suhteelliset vaikutukset ovat matalilla multipoleilla karkeasti luokkaa 1.7×10^{-3} , 5×10^{-4} ja 2.2×10^{-3} 30, 44 ja 70 GHz:lla. Erotukset ei-diagonaalelementteihin ovat matalilla multipoleilla karkeasti luokkaa -8×10^{-5} , -1.5×10^{-5} ja -6×10^{-5} 30, 44, ja 70 GHz:lla.

5.4 Etäisten sivukeilojen vaikutus

Etäisten sivukeilojen vaikutus matriisi-ikkunafunktion elementteihin dominoi kaikilla taajuuksilla multipoliskaalan alkupäässä $\ell \lesssim 20$. Näiden vaikutus on diagonaalelementeille luokkaa 8×10^{-3} , 1.2×10^{-3} ja 6.4×10^{-3} 30, 44 ja 70 GHz:lla. Erot koko keilan ja pääkeilan ei-diagonaalelementtien välillä ovat matalilla multipoleilla karkeasti luokkaa -1×10^{-3} , 1.1×10^{-4} ja -9×10^{-4} 30, 44, ja 70 GHz:lla. Liitteen kuvissa A.10, A.11 ja A.12 on esitetty multipolille $\ell = 180$ asti 30, 44 ja 70 GHz:n diagonaalelementeille koko keilan suhteet pääkeiloihin ja ei-diagonaalelementeille koko keilan erot pääkeiloihin.

5.5 Matriisi-ikkunafunktion elementtien käyttäytyminen

Sen ymmärtämiseksi, mitkä keilojen ominaisuudet vaikuttavat mitenkään matriisi-ikkunafunktioihin – erityisesti niiden ei-diagonaalelementteihin, jotka kuvaavat lämpötila- ja polarisaatiosignaalin vuotoa toisiinsa – tutkitaan seuraavaksi, miten keiloja kuvaavat parametrit, puoliarvoleveys (FWHM) ja elliptisyys, vaikuttavat matriisi-ikkunafunktion elementteihin, kun polttotasossa olevien radiometrien $\psi_{\ell\ell}$ kulmat pysyvät kiinnitettynä. Tässä tutkielmassa on esitetty matriisi-ikkunafunktion elementtien käyttäytyminen 44 GHz:n pääkeilalle, mutta matriisielementtien käyttös on vastaava myös toisilla taajuuksilla, tai mikäli sivukeilat huomioitaisiin. Nämä taustasäteilyn simulaatiot on ajettu muuten samoilla parametreilla kuin luvussa 5.1, mutta laskentaresurssien säästämiseksi vain yksittäisellä realisaatiolla (jolloin Monte Carlo –kohina on suurempi) ja todennukaisten keilojen sijaan on käytetty erilaisia gaussisia keiloja.

Oletetusti $T - P$ vuodot aiheutuvat saman torven M ja S radiometrien erilaisista keilojen muodoista eli erilaisista FWHM:istä ja elliptisyyksistä. Niinpä tätä tutkimusta varten on ajettu kahdeksan erilaista yksittäisen realisaation signaalisimulaatiotapausta erilaisilla simulaatioon syötettyjen pääkeilojen parametrikombinaatioilla:

- Simulaatio I) Niin sanottu ”elementtien nollaus”, eli tähän on valittu kaikkien radiometrien gaussisten pääkeilojen FWHM:t identtisiksi ($\text{FWHM} = 30'$) ja pääkeilojen muodot pyöreiksi (elliptisyys=1.0). Tämä on ideaalitapaus, jossa satelliitin skannaustrategia yhdessä keilan epäsymmetrisen muodon kanssa ei muodostakaan efektiivisten keilojen polarisaatioartefakteja. Tällöin signaalivuoto on marginaalisen pieni, ja pelkkä skalaari-ikkunafunktio on tällaisessa ideaalitapauksessa riittävä formalismi jatkoanalyysiä varten. Todellisuudessa keilat eivät ole pyöreitä, eivät täysin gaussisia, eivätkä keskenään identtisiä.
- Simulaatio II) Tässä FWHM:t ovat valittu kaikkien radiometrien gaussisilla pääkeiloilla identtisiksi ($\text{FWHM} = 30'$) ja pääkeilojen muodot epäsymmetrisiksi (elliptisyys = 1.2). Tämä tapaus demonstroi, millainen vaikutus elliptisyyden kasvattamisella on matriisi-ikkunafunktion elementteihin.
- Simulaatio III) Gaussisten pääkeilojen muodot ovat symmetrisiä (elliptisyys = 1.0), mutta saman torven M ja S radiometreille on valittu M radiometrin mukaiset pääkeilojen FWHM:t, jotka ovat otettu taulukosta 3.1 (LFI24:lle $\text{FWHM} = 23.18'$, LFI25:lle $\text{FWHM} = 30.02'$ ja LFI26:lle $\text{FWHM} = 30.13'$). Tämä tapaus kertoo miten FWHM:ien erot eri torvien välillä vaikuttaa matriisi-ikkunafunktion elementteihin.
- Simulaatio IV) Muuten kuin tapaus III, mutta elliptisyydet ovat asetettu sekä M että S radiometreilla M radiometrien mukaisesti ja näiden arvot on otettu taulukosta 3.1 (LFI24:llä elliptisyys=1.388, LFI25:llä elliptisyys=1.191 ja LFI26:lla elliptisyys=1.191). Tämä demonstroi, miten eri torvien erilaiset elliptisyydet sekä FWHM:t vaikuttavat yhdessä matriisi-ikkunafunktion elementteihin.
- Simulaatio V) Tähän on valittu gaussisten pääkeilojen FWHM:t identtisiksi ($\text{FWHM} = 30'$), mutta M radiometrien pääkeiloille on valittu elliptisyydet hieman suuremmiksi (1.25) kuin S radiometrien pääkeiloille (1.20). Tämä tapaus kertoo, miten saman torven M radiometrin suurempi elliptisyys vaikuttaa matriisi-ikkunafunktion elementteihin.
- Simulaatio VI) Tähän on valittu gaussisten pääkeilojen FWHM:t identtisiksi ($\text{FWHM} = 30'$), mutta S radiometrien pääkeiloille on valittu elliptisyydet hieman suuremmiksi (1.25) kuin M radiometrien pääkeiloille (1.20). Tämä tapaus demonstroi, miten saman torven S radiometrin suurempi elliptisyys vaikuttaa matriisi-ikkunafunktion elementteihin.
- Simulaatio VII) Tähän simulaatioon on otettu taulukon 3.1 mukaiset gaussisten pääkeilojen FWHM:t ja elliptisyydet. Tämä simulaatio demonstroi monimutkaisinta tapausta gaussisilla pääkeiloilla, missä jokaisella radiometrin keilalla on toisistaan poikkeavat FWHM:t ja elliptisyydet.
- Simulaatio VIII) Tässä simulaatiotapauksessa on gaussisten pääkeilojen sijaan käytetty todennukaisia pääkeiloja, jotka efektiivisesti vastaavat tapauksessa VII kuvattuja gaussisia keiloja parametreineen. Tämä tapaus demonstroi millainen vaikutus todennukaisilla pääkeiloilla on matriisi-ikkunafunktioiden elementteihin.

Case/radiometer	LFI24M		LFI24S		LFI25M		LFI25S		LFI26M		LFI26S	
	FWHM [°]	Ellipticity	FWHM [°]	Ellipticity	FWHM [°]	Ellipticity	FWHM [°]	Ellipticity	FWHM [°]	Ellipticity	FWHM [°]	Ellipticity
I	30.00	1.000	30.00	1.000	30.00	1.000	30.00	1.000	30.00	1.000	30.00	1.000
II	30.00	1.200	30.00	1.200	30.00	1.200	30.00	1.200	30.00	1.200	30.00	1.200
III	23.18	1.000	23.18	1.000	30.02	1.000	30.02	1.000	30.13	1.000	30.13	1.000
IV	23.18	1.388	23.18	1.388	30.02	1.191	30.02	1.191	30.13	1.191	30.13	1.191
V	30.00	1.250	30.00	1.200	30.00	1.250	30.00	1.200	30.00	1.250	30.00	1.200
VI	30.00	1.200	30.00	1.250	30.00	1.200	30.00	1.250	30.00	1.200	30.00	1.250
VII	23.18	1.388	23.03	1.344	30.02	1.191	30.79	1.188	30.13	1.191	30.52	1.189

Taulukko 5.2: Syötettyjen gaussisten pääkeilojen puoliarvoveydet ja elliptisyydet 44 GHz:n seitsemässä erilaisessa simulaatiotapauksessa. Simulaation VII parametrit vastaavat efektiivisesti simulaation VIII parametreja.

Näiden seitsemän ensimmäisen simulaatiotapauksen syötettyjen gaussisten pääkeilojen FWHM:t ja elliptisyydet ovat esitetty taulukossa 5.2. Koska simulaatiotapauksen VIII parametrit vastaavat efektiivisesti tapauksen VII parametreja, ei tapausta VIII ole erikseen taulukossa.

Kuvan 5.3 ylin paneeli vasemmalla esittää simulaation I, ylin paneeli oikealla simulaation II, alin paneeli vasemmalla simulaation III ja alin paneeli oikealla simulaation IV diagonaalelementtejä. Vastaavasti kuvassa 5.4 näkyvät samassa järjestyksessä lueteltuna simulaatioiden IV-VIII diagonaalelementit. Lisäksi simulaatioiden I-VIII ei-diagonaalelementit on kategorioitu kolmeen kuvakollaasiin 5.5, 5.6, 5.7 seuraavasti: kuvassa 5.5 esiintyvät sellaiset ei-diagonaalelementit, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan keskivaiheilla, kuvassa 5.6 näkyvät sellaiset elementit, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan alkuosassa ja kuvassa 5.7 esiintyvät ne ei-diagonaalelementit, jotka ovat pienimmillään multipoliskaalassa. Simulaatiotapaukset I-VIII on järjestetty näissä kaikissa kolmessa kuvakollaasissa vasemmalta ylhäältä oikealle alas.

Kuvan 5.3 kahdesta ensimmäisestä paneelista ylhäältä luettuna voidaan todeta elliptisyyden kasvattamisen 1.0:sta (täysin pyöreästä keilasta) 1.2:een lisäävän kohinaisuutta diagonaalelementtien eroihin TT:n elementistä. Myöskään kohinan taso ei juurikaan muutu, vaikka saman torven M ja S radiometrien keiloilla olisikin hieman toisistaan poikkeavat elliptisyydet (yhdeällä 1.2 ja toisella 1.25), mikä nähdään, kun verrataan kuvan 5.4 kahta ylintä paneelia keskenään. Näiden kahden eri simulaation V ja VI diagonaalelementtien suhteelliset erot, kun $\ell \sim 600$, ovat 0.02% suuruusluokkaa ja pienenevät tästä mentäessä kohti matalampia multipoleja. Tämän vuoksi kuvan 5.4 ensimmäinen ja toinen paneeli näyttävät lähes identtisiltä.

FWHM:ien muuttaminen eri torvien välillä toisistaan poikkeavaksi aiheuttaa diagonaalelementtien ja TT:n erotuksille alaspäin laskevat käyrät, mitkä näkyvät kuvien 5.3 ja 5.4 kolmannissa paneeleissa. Mikäli saman torven eri radiometrien keilojen välisten FWHM:ien poikkeamien lisäksi asetetaan elliptisyydet toisistaan poikkeaviksi eri torvien välillä, lisääntyy kohinan taso, mikä nähdään kun verrataan keskenään kuvan 5.3 kolmatta ja neljättä paneelia. Tässä neljännessä paneelissa FWHM:t ja elliptisyydet ovat erilaiset vain eri torvien välillä, mutta identtiset saman torven eri radiometrien välillä. Muutos on marginaalinen, mikäli vielä FWHM:t ja elliptisyydet asetetaan kaikille radiometreille hieman toisistaan poikkeaviksi, taulukon 3.1 FWHM:ien ja elliptisyyksien mukaisesti, mikä nähdään, kun verrataan keskenään kuvan 5.3 neljättä paneelia (symmetrisen gaussisen keilan ikkunafunktioita) kuvan 5.4 kolmanteen paneeliin. Näiden kahden eri tapauksen diagonaalelementtien suhteellinen ero, kun $\ell \sim 600$, on 3% suuruusluokkaa ja ero pienenee mentäessä tätä pienemmille multipolin arvoille.

Kaikkein todenmukaisin tapaus diagonaalelementtien eroista saadaan kuitenkin, kun käytetään Jupiterin ylikulkujen avulla laskettuja GRASP-keiloja. Skannausstrategia yhdessä todenmukaisen GRASP-keilalle ominaisen asymmetrian kanssa saa aikaan suuria efektiivisen keilan muodon muutoksia eri osissa taivasta, ja tällöin symmetrisempi gaussinen keila ei anna yhtä tarkkaa kuvaa lopullisesta matriisi-ikkunafunktiosta. Tarkempi keilan muoto laskee diagonaalelementtien erotuskäyriä matalimmilla multipoleilla nollasta ja jakaa käyrät kahteen osaan: niihin, jotka riippuvat lämpötilasta (TT, TE ja TB) ja tällöin poikkeavat matalilla multipoleilla vähemmän TT:n käyrästä, ja niihin, jotka riippuvat E- ja B-moodin polarisaatiosta ja näiden ristikorrelaatioista (EE, BB, EB) ja tällöin poikkeavat enemmän TT:n käyrästä. Käyrien jakautuminen ei johdu

vajaasta pääkeilan tehosta, sillä vastaava jakautuminen on havaittu myös koko keiloille.

Tutkitaan seuraavaksi ei-diagonaalelementtien käytöstä. Kuvan 5.5 ensimmäisestä ja toisesta paneelista ylhäällä voidaan todeta, että elliptisyyden kasvattaminen 1.0:sta 1.2:een laskee hieman niiden ei-diagonaalelementtien käyriä, jotka ovat tavallisesti pienimmillään multipoliskaalan keskivaiheilla. Saman kuvan kolmannesta paneelista käy ilmi, että mikäli torvien radiometrien keiloilla on edelleen keskenään samat FWHM:t, mutta torvien välillä nämä poikkeavat toisistaan, on ero luokkaa -9×10^{-5} verrattuna tapaukseen, jossa FWHM:t ovat kaikilla radiometreilla identtiset (ensimmäinen paneeli).

Jos torvien väliset FWHM:t sekä elliptisyydet ovat toisistaan poikkeavat, mutta identtiset saman torven M ja S radiometrien välillä, kääntyvät muutamit ei-diagonaalelementtien käyrät hieman positiivisiksi, mikä nähdään kun verrataan kolmatta ja neljättä paneelia keskenään. Kaikkein voimakkain muutos käyrien muotoon kuitenkin tapahtuu, mikäli elliptisyydet asetetaan saman torven eri radiometrien välillä poikkeamaan hieman toisistaan. Mikäli saman torven M radiometrin keilan elliptisyys on hieman suurempi kuin S radiometrin, ovat osa ei-diagonaalelementtien käyristä selkeästi negatiivisia, mikä näkyy viidennessä paneelissa. Käytös on päinvastainen, mikäli saman torven S radiometrin keila on elliptisyydeltään suurempi kuin M radiometrin keila, mikä puolestaan näkyy paneelissa kuusi. M ja S radiometrien väliset elliptisyyden poikkeamat toisistaan synnyttävät siis pääasiassa näiden ei-diagonaalelementtien käyrien muodot ja paneelissa seitsemän näkyy gaussisten keilojen ei-diagonaalelementtejä, joista osa on selkeästi negatiivisia. Tämä ei ole yllättävää, koska gaussisten keilojen elliptisyydet ovat kaikilla torvilla M radiometrien suhteen suurempia S radiometreihin verrattuna, mikä näkyy taulukosta 3.1, jonka mukaan gaussiset keilat on rakennettu.

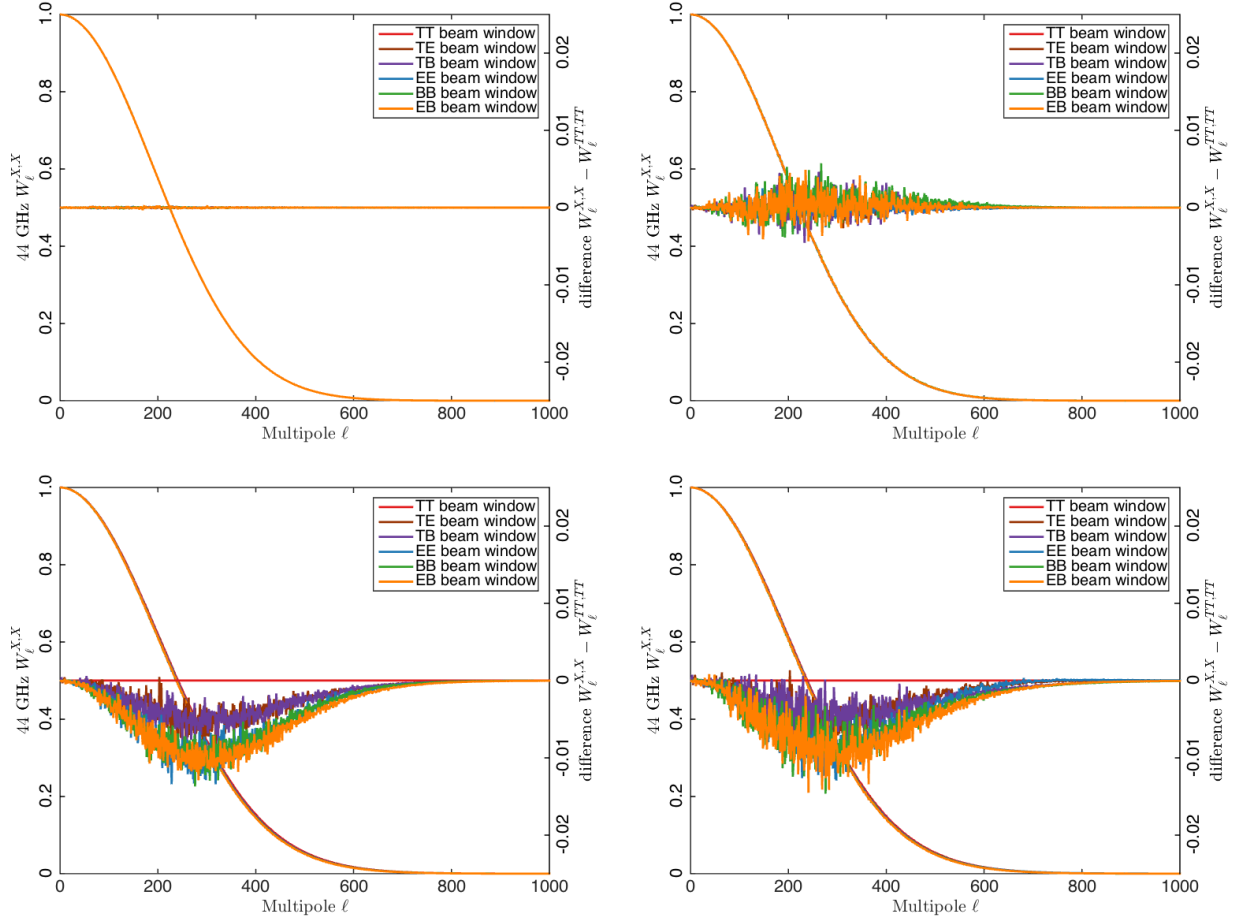
Täydellisyysden vuoksi on myös esitetty todenmukainen GRASP-keila paneelissa kahdeksan, josta nähdään, että todenmukaisella pääkeilalla vuotokäyrät TE:stä TT:hen, TE:stä EE:hen, EB:stä TB:hen, EE:stä TE:hen, TB:stä EB:hen ja TT:stä TE:hen ovat selkeästi negatiivisia 44 GHz:lla. Gaussisiin keiloihin verrattuna todenmukaiset keilat ovat näiden ei-diagonaalelementtien suhteen voimakkaampia ja hieman kohinaisempia. Eri taajuuksien erilaiset ei-diagonaalelementtien käyrien muodot niiden ei-diagonaalelementtien osalta, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan keskivaiheilla johtuvat siis pohjimmiltaan saman torven M ja S radiometrien keilojen elliptisyyksien eroista. Kuten taulukosta 3.1 havaitaan, on 30 ja 70 GHz:lla S radiometrien keilojen elliptisyydet suurempia kuin M radiometrien, joten tällöin voimakkaimmat 30 ja 70 GHz:n ei-diagonaalelementtien käyrät ovat positiivisia, mikä näkyy 30 GHz:n osalta liitteen kuvan A.13(a) ja 70 GHz:n osalta kuvan 5.8(a) toisesta paneelista.

Niihin ei-diagonaalelementteihin, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan alkuarvoilla, eivät elliptisyyden kasvattamiset tai M ja S radiometrien eri keilojen FWHM:ien tai elliptisyyksien erot juuri tuo muutoksia, elleivät erot ole jokaisen radiometrin välillä toisistaan poikkeavat. Nämä marginaaliset erot esiintyvät kuvan 5.6 paneeleissa 2 – 6, ja ne poikkeavat vain suuremmalla kohinalla sellaisesta simulaatiosta, jossa jokaisen radiometrin keilalla on identtinen FWHM ja elliptisyys. Kuvan 5.6 toisen paneelin ja kolmannen paneelin käyrien väliset erot ovat suurimmillaan noin 8.8×10^{-3} , samoin toisen ja neljännen paneelin käyrien väliset erot. Toisen ja viidennen paneelin käyrien väliset erot ovat noin -4.9×10^{-4} , samoin toisen ja kuudennen paneelin käyrien

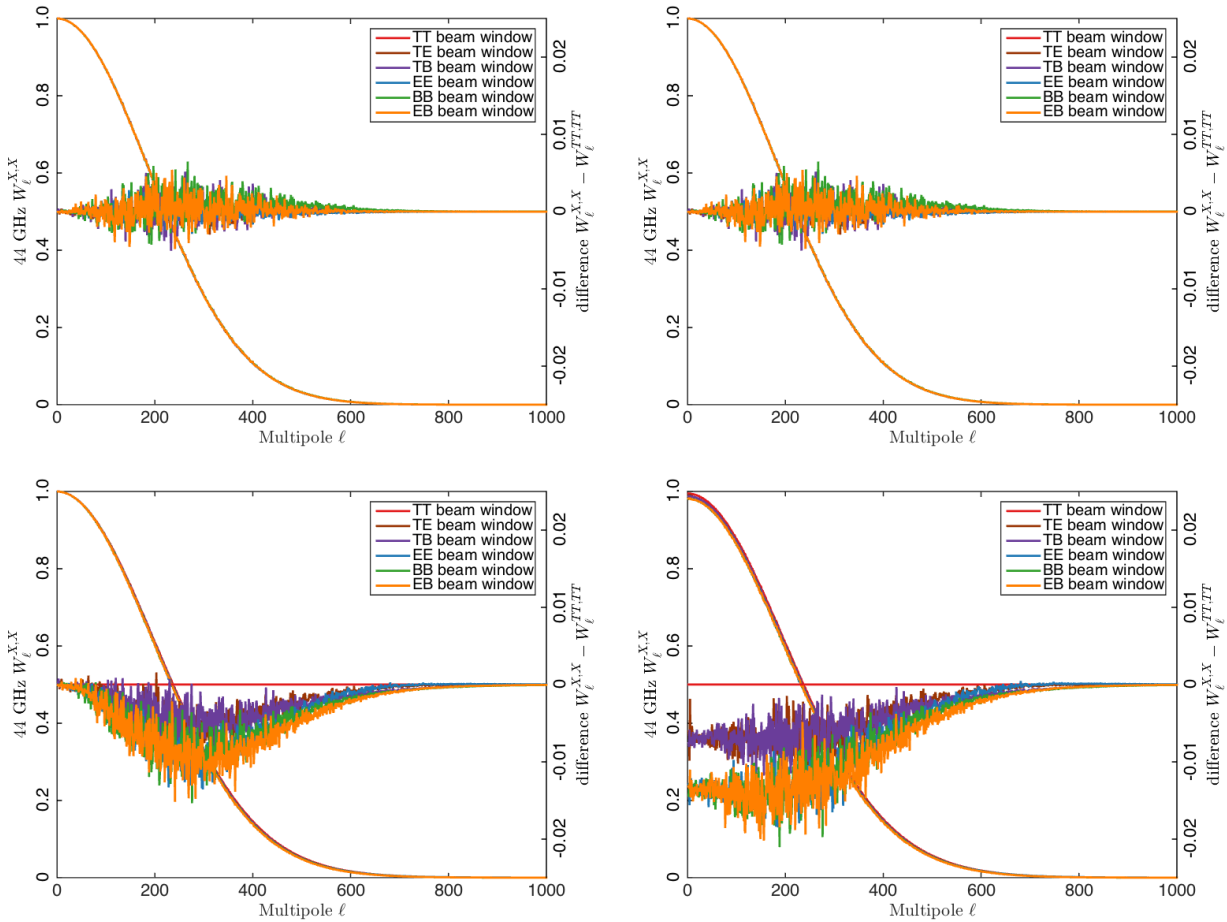
väliset erot. Vasta kun jokaisen radiometrin keilalla on toisistaan hieman poikkeava elliptisyys ja FWHM, jakaantuvat osa ei-diagonaalelementtien käyristä positiivisiksi ja osa negatiivisiksi, mikä näkyy kuvan 5.6 seitsemännessä paneelissa. Vertaamalla keskenään gaussisten keilojen ja GRASP-keilojen ei-diagonaalelementtejä (paneeleita seitsemän ja kahdeksan) nähdään, että todenmukaiset keilat eivät näiden ei-diagonaalelementtien osalta poikkeaa, suurempaa kohinaa lukuun ottamatta, muodoltaan gaussisten keilojen ei-diagonaalelementteistä.

Kuvan 5.7 ensimmäisestä ja toisesta paneelista voidaan todeta, että elliptisyyden kasvattaminen 1.0:sta 1.2:een ei vaikuta, EE:stä BB:hen tai BB:stä EE:hen elementtejä lukuunottamatta, merkittävästi niihin ei-diagonaalelementteihin, jotka ovat pienimmillään multipoliskaalassa. FWHM:n asettaminen eri torvien välillä toisistaan poikkeavaksi kasvattaa EE:stä BB:hen ja BB:stä EE:hen käyrien amplitudeja (kolmas paneeli), mutta ei tuo muihin ei-diagonaalelementteihin merkittävää muutosta. Elliptisyyden vaihtaminen erilaiseksi eri torvien välillä (neljäs paneeli) ei aiheuta muuta kuin käyrien EE:stä BB:hen ja BB:stä EE:hen amplitudien kasvua entisestään. M tai S radiometrien keilojen toisistaan poikkeavat elliptisyydet saavat TT:stä EE:hen elementit kasvamaan hieman positiivisen puolelle ja vastaavasti TT:stä BB:hen elementin laskemaan negatiivisen puolelle, mikä nähdään viidennessä ja kuudennessa paneelissa. Koska näissä kahdessa paneelissa FWHM:t ovat samat kaikilla radiometreilla, ei ei-diagonaalelementtien BB:stä EE:hen ja EE:stä BB:hen amplitudit ole yhtä voimakkaat kuin paneeleissa kolme ja neljä. Vasta, kun kaikki radiometrit ovat toisistaan poikkeavia sekä FWHM:ien että elliptisyyksien suhteen (paneeli seitsemän), saadaan ei-diagonaalelementit lähestymään todenmukaisia keiloja (paneeli kahdeksan). Todenmukaisten GRASP-keilojen matriisi-ikkunafunktion BB:stä EE:hen ja EE:stä BB:hen elementtien suuruus ja muoto ovat näiden simulaatioiden valossa selitettävissä elliptisyyden ja erityisesti FWHM:ien poikkeavuudella toisistaan eri torvien välillä. Muiden ei-diagonaalelementtien muoto syntyy saman torven eri radiometrien elliptisyyksien ja FWHM:ien pienistä eroista.

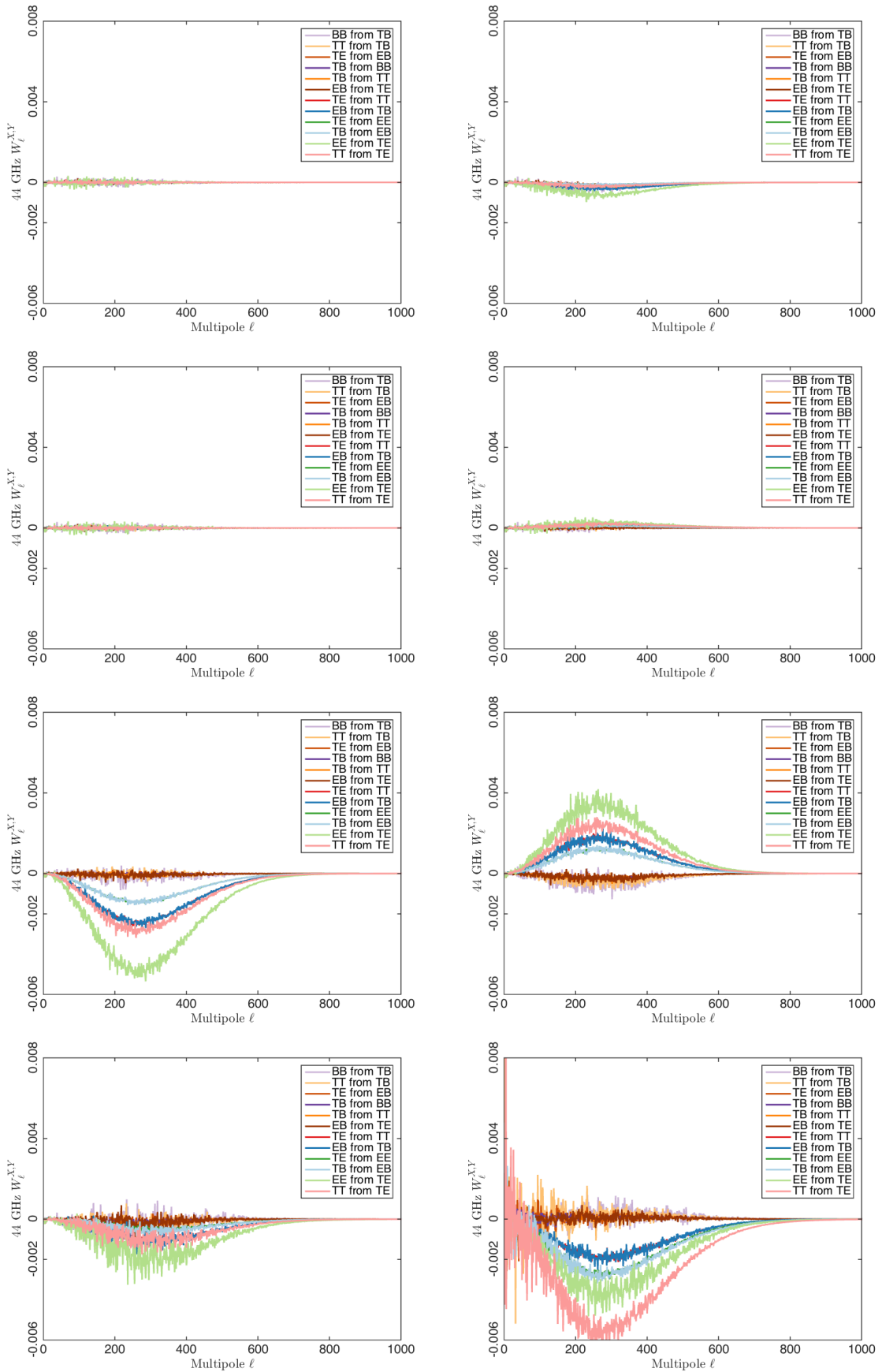
Tiivistettynä, vuodosta aiheutuvat efektit poistuvat, jos saman taajuuden kaikkien radiometrien havaintokeilat olisivat keskenään identtisiä. Etualan säteilylle signaalivuodot on ymmärretty saman torven M ja S radiometrien välisten erojen aiheuttamaksi [45], ja tätä syytä oletettiin myös tässä tutkielmassa taustasäteilyn signaalivuodoille. Kuitenkin saman torven M ja S radiometrien erilaiset keilan muodot eivät yksinään riitä selittämään $T - P$ vuotoa, vaan myös torvien väliset erot aiheuttavat sitä. Suurempia vuotoilmiöitä alkaa esiintyä muun muassa EE:stä BB:hen ja päinvastoin, jos torvien keilan FWHM:t poikkeavat hieman toisistaan, vaikka saman torven radiometrit olisivat keskenään identtiset. Tässä tutkielmassa keilojen FWHM:ien ero eri torvien välillä oli suurimmillaan noin $7'$. Saman torven radiometrien keilojen pienet erot elliptisyydessä kääntävät tiettyjen vuotoelementtien käyrät päinvastaisiksi riippuen kumman radiometrin elliptisyys on suurempi. Tämän tutkielman laajentamiseksi olisi vielä voinut tutkia, miten saman torven M ja S radiometrin toisistaan poikkeavat FWHM:t vaikuttavat vuotokomponentteihin, kun radiometrien elliptisyys pidetään samassa torvessa identtisenä. Ajan puutteen vuoksi tästä simulaatiotapauksesta jouduttiin kuitenkin luopumaan. Tästä huolimatta on selvää, että monimutkaisen optisen järjestelmän, kuten Planckin, vuotoefektit ovat tietyllä LFI:n taajuuskaistalla seurausta niin saman torven yksilöllisistä M ja S radiometreista kuin myös torvien keskinäisistä eroista ja keilojen erilainen elliptisyys tai FWHM ei yksinään riitä selittämään vuotoilmiöitä.



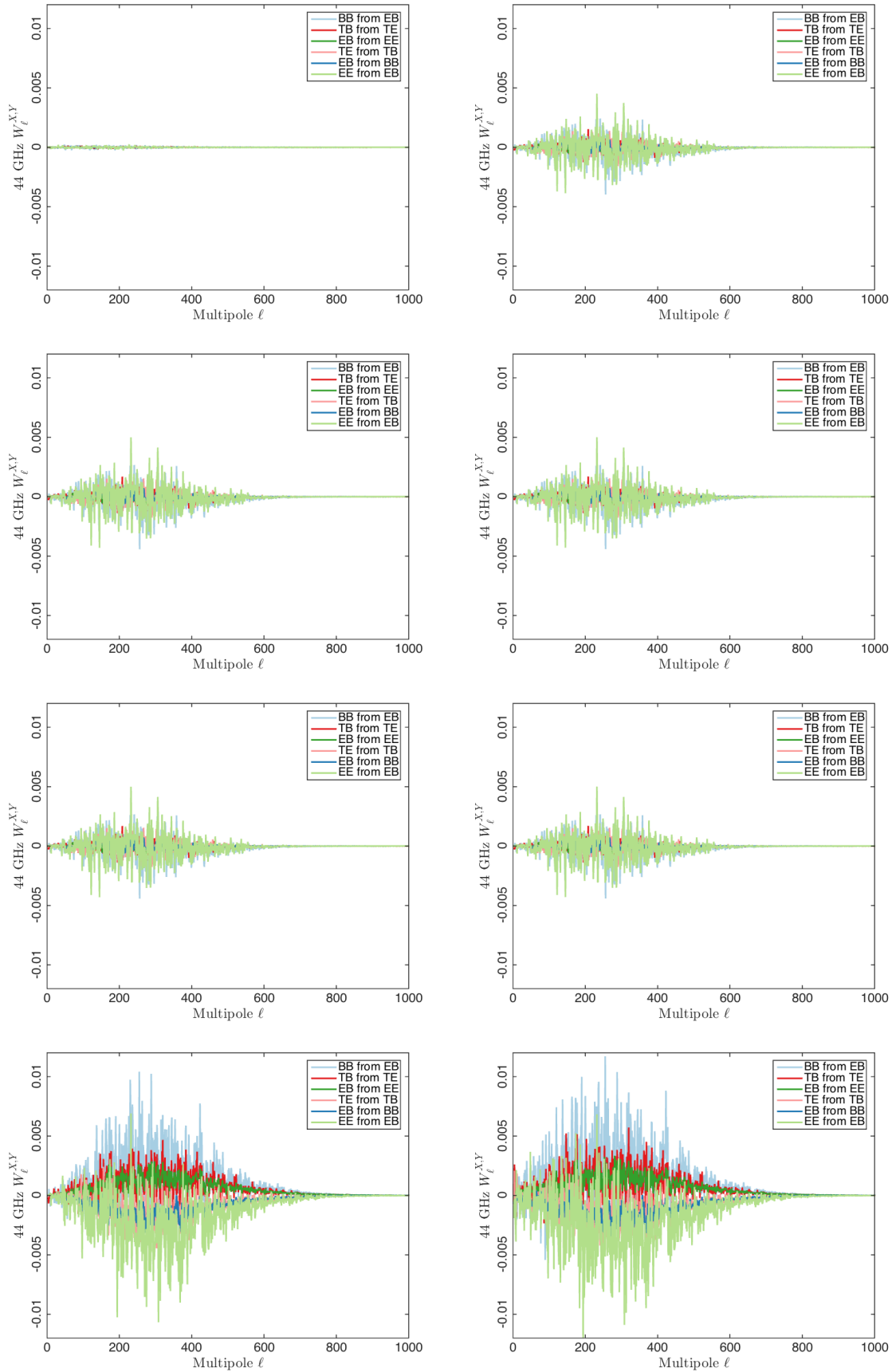
Kuva 5.3: Neljä erilaista yksittäisen realisaation lelusimulaatiota matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementtien käyttäytymisestä gaussisen pääkeilan erilaisilla FWHM:illä ja elliptisyyksillä 44 GHz:lla. Ensimmäinen paneeli: Kaikkien radiometrien gaussiset pääkeilat pyöreitä identtisillä puoliarvoveveyksillä (FWHM = 30'). Toinen paneeli: radiometrien pääkeiloilla elliptisyys 1.2 ja identtiset puoliarvoveveydet (FWHM = 30'). Kolmas paneeli: kaikkien radiometrien gaussisilla pääkeiloilla elliptisyys 1.0 ja torvien välillä toisistaan poikkeavat gaussisten pääkeilojen puoliarvoveveydet (LFI24:llä FWHM = 23.18', LFI25:llä FWHM = 30.02', LFI26:lla FWHM = 30.13'), mutta saman torven M ja S radiometreilla molemmilla M radiometrin mukainen gaussisen pääkeilan puoliarvoveveys. Neljäs paneeli: saman torven M ja S radiometreilla molemmilla M radiometrin mukainen gaussisen pääkeilan elliptisyys (LFI24:llä elliptisyys = 1.388, LFI25:llä elliptisyys = 1.191 ja LFI26:lla elliptisyys = 1.191) ja FWHM:t kuten kolmannessa paneelissa. Kuvien välisten vertailujen helpottamiseksi kaikissa paneeleissa on käytetty samaa asteikkoa.



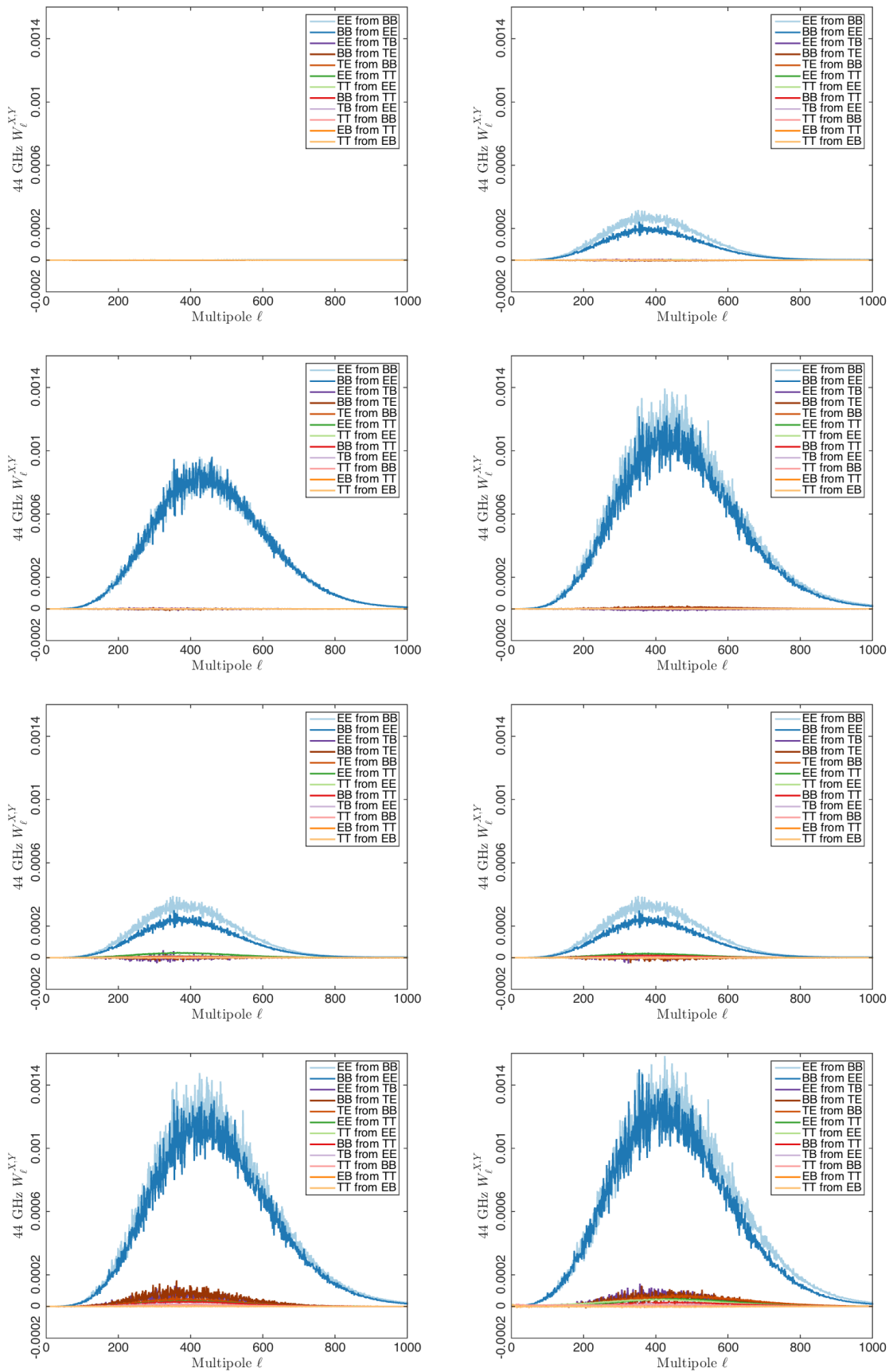
Kuva 5.4: Toiset neljä erilaista yksittäisen realisaation lelusimulaatiota matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementtien käyttäytymisestä pääkeilan erilaisilla puoliarvoveyksillä ja elliptisyyksillä 44 GHz:lla. Ensimmäinen paneeli: kaikkien radiometriä gaussisilla pääkeiloilla identtiset FWHM:t (FWHM = 30') ja M radiometreilla gaussisten pääkeilojen elliptisyys = 1.25 ja S radiometreilla elliptisyys = 1.2. Toinen paneeli: identtiset FWHM:t, M radiometreilla gaussisten pääkeilojen elliptisyys = 1.2 ja S radiometreilla elliptisyys = 1.25. Kolmas paneeli: tuoreimmasta polttotasotietokannasta (engl. focalplane database) luettu gaussisten pääkeilojen FWHM:t ja elliptisyydet, joilla toteutettu CMB Monte Carlo –simulaatio, josta on saatu matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit. Neljäs paneeli: tuoreimmista GRASP pääkeiloista tehty yksittäisen realisaation CMB Monte Carlo –simulaatio, josta saatu matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit.



Kuva 5.5: Niiden ei-diagonaalelementtien käyttö erilaisilla pääkeilan FWHM:illä ja elliptisyyksillä, mitkä ovat suurimmillaan tai pienimmillään multipoliskaalan keskivaiheilla. Neljän ylimmän paneelin sisältö on selitetty kuvassa 5.3 ja neljän alimman kuvassa 5.4.



Kuva 5.6: Niiden ei-diagonaalelementtien käytös erilaisilla pääkeilan FWHM:illä ja elliptisyyksillä, mitkä ovat suurimmillaan multipoliskaalan alkuosassa. Kuvien sisältö on selitetty kuvissa 5.3 ja 5.4.



Kuva 5.7: Niiden ei-diagonaalelementtien käytös erilaisilla pääkeilan FWHM:illä ja elliptisyyksillä, mitkä ovat multipoliskaalassa pienimmillään. Kuvien sisältö on selitetty kuvissa 5.3 ja 5.4.

5.6 Matriisi-ikkunafunktioiden validointi

Rekonstruoitu taivaan kulmatehospektri $\tilde{C}_\ell(reco)$ voidaan rakentaa kääntämällä yhtälö (3.18), eli soveltamalla matriisi-ikkunafunktion käänteismatriisia W_ℓ^{-1} havaittuun kulmatehospektriin \hat{C}_ℓ . Kaavana tämä voidaan kirjoittaa

$$\tilde{C}_\ell(reco) = W_\ell^{-1} \hat{C}_\ell,$$

missä $\tilde{C}_\ell(reco)$ ja \hat{C}_ℓ ovat molemmat 6×1 vektoreita ja W_ℓ on 6×6 matriisi. Tätä rekonstruoidua kulmatehospektriä voidaan verrata simulaatioon syötettyyn taivaan kulmatehospektriin, jotta nähdään, miten hyvin rekonstruktio vastaa taivaan kulmatehospektriä.

Koska on kiinnostavaa nähdä, miten hyvin vakio \mathcal{D}_ℓ -spektrillä tehty matriisi-ikkunafunktio toimii todenmukaisen taivaan kulmatehospektrin \tilde{C}_ℓ rekonstruktioon, validointia varten on tehty yksi sellainen CMB Monte Carlo –realisaatio, joka sisältää identtisen skannausstrategian ja samanlaiset keilat kuin matriisi-ikkunafunktiosimulaatiossa, mutta johon on vakio \mathcal{D}_ℓ -spektrin sijaan syötetty todellista taivaan kulmatehospektriä vastaava kulmatehospektri. Tämä validointi on toteutettu jokaiselle Planckin matalan taajuuden instrumentille erikseen ja validoinnin tulokset näkyvät 70 GHz:lle kuvassa 5.8(a) (liitteen kuva A.15(a)). Vastaavat validoinnin tulokset 30 ja 44 GHz:lle löytyvät liitteen kuvista A.13(a) ja A.14(a). Rekonstruktio on onnistunut, kun rekonstruoidun taivaan kulmatehospektrit (vihreät käyrät) kulkevat taivaan kulmatehospektrien (sinisten käyrien) päällä. Taivaan kulmatehospektreissä näkyvä kohina on kosmista varianssia, josta kerrottiin luvussa 2.5.2. Rekonstruoidun taivaan kohinaa dominoi Monte Carlo –varianssi σ_{MC}^2 , joka pienenee verrannollisena Monte Carlo –realisaatioiden määrän n neliöjuureen eli $\sigma_{MC}^2 \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$.

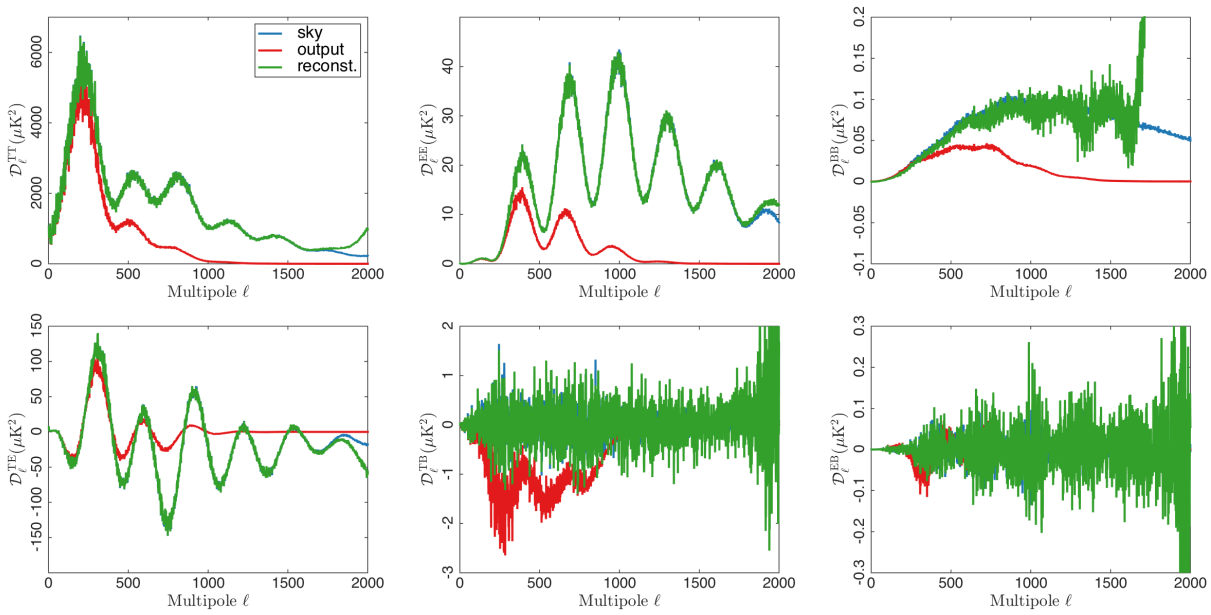
On syytä huomata, että 30 ja 44 GHz:n BB:iden kulmatehospektreillä on varsin suuret suhteelliset virheet korkeilla ($\ell \sim 600$) multipoleilla. Tämä on oletettavaa, sillä todenmukaiseen CMB Monte Carlo –simulaatioon syötetty BB:n kulmatehospektri on erittäin pieni¹ suhteessa muihin kulmatehospektreihin (suurimmillaan simulaatioon syötetty $\mathcal{D}_\ell^{BB} \sim 0.1 \mu K^2$, mutta $\mathcal{D}_\ell^{TT} \sim 6000 \mu K^2$, $\mathcal{D}_\ell^{EE} \sim 40 \mu K^2$ ja $\mathcal{D}_\ell^{TE} \sim 140 \mu K^2$), jolloin suurten efektien vaikutusten korjaaminen pienestä signaalista aiheuttaa suhteellisen virheen kasvua. Tämä efekti on suurimmillaan 44 GHz:n rekonstruoidussa \mathcal{D}_ℓ^{BB} :ssä, sillä tällä taajuudella saman torven kahden radiometrin (M ja S) keilojen väliset poikkeamat keiloja karakterisoivien parametrien osalta ovat suurempia kuin muilla taajuuksilla, mikä aiheuttaa ylimääräistä signaalivuotoa.

Kuvassa 5.8(b) (liitteen kuvassa A.15(b)) on esitetty kuudessa paneelissa 70 GHz:n rekonstruoidun ja taivaan \mathcal{D}_ℓ :ien vertailukäyrät multipolille $\ell = 50$ asti. Vastaavat rekonstruktiokuvaajat 30 ja 44 GHz:lle löytyvät liitteen kuvista A.13(b) ja A.14(b). Kuuden paneelin ensimmäisellä rivillä ovat \mathcal{D}_ℓ :ien autokorrelaatiot, järjestyksessä TT, EE ja BB, ja toisella rivillä ristikorrelaatiot, järjestyksessä TE, TB ja EB. Koska taivaan \tilde{C}_ℓ^{TT} on ainoa, joka on positiivinen kaikilla multipolin arvoilla, on TT-käyrien vertailut laskettu rekonstruktion ja taivaan \mathcal{D}_ℓ :ien suhteena ja muille komponenteille näiden erotuksena. Erityisesti 44 ja 70 GHz:n TT-käyrät poikkeavat eniten nollassa. Näiden poikkeamien suuruusluokka on kuitenkin suurimmillaan $\sim 3 \times 10^{-3}$ (absoluuttisena erona

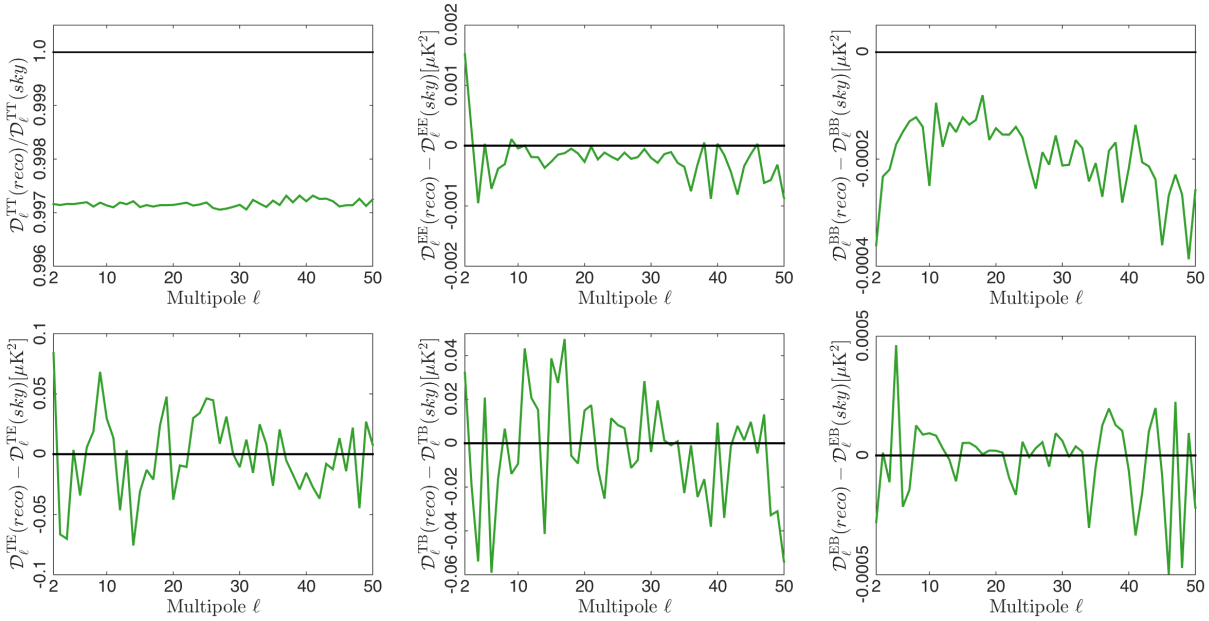
¹ Simulaatiossa käytetty taivaan kulmatehospektri on peräisin havaintoihin pohjautuvasta teoreettisesta mallista, jossa ei ole mukana primordiaalisia tensorihäiriöitä, jotka synnyttävät merkittävää B-moodin polarisaatiota. Vain heikko E-moodista gravitaatiolinssi-ilmiön kautta syntynyt B-moodi oli mukana.

$\sim 3\mu K^2$), ja TT kulmatehospektrin residuaalit ovat näillä multipoleilla suuruusluokkaa $\sim 60\mu K^2$ (kuva 2.4), joten erot eivät ole merkittäviä. Erot saattavat johtua matriisi-ikkunafunktiomallin oletuksesta, jonka mukaan kahden eri $a_{\ell m}$ -kertoimen ℓ :t eivät sekoitu keskenään. Näiden pienien erojen tarkempi analyysi on kuitenkin tämän tutkielman ulkopuolella. Muiden korrelaatioiden erot rekonstruoidun ja taivaan kulmatehospektrin välillä ovat matalilla multipoleilla suurimmillaan 30 GHz:lle $\sim 0.7\mu K^2$ (TE:ssä, kun $\ell = 2$), 44 GHz:lle $\sim 0.08\mu K^2$ ja 70 GHz:lle $\sim 0.07\mu K^2$. Nämä erot ovat kuitenkin pieniä verrattuna TE ja EE matalien multipolien kulmatehospektrien residuaaleihin (kuviin 2.6(a) ja 2.6(b)).

Hyvä esimerkki mallin toimivuudesta näkyy 70 GHz:n TB:ssä (kuvan 5.8(a) keskimmäinen paneeli alhaalta). Tässä keiloista aiheutuvat efektit ovat varsin voimakkaasti muokanneet taivaan kulmatehospektriä eli havaittua kulmatehospektriä (punainen käyrä), jonka tulisi kulkea keskimäärin nollassa (sininen käyrä). Soveltamalla havaittuun kulmatehospektriin käänteistä matriisi-ikkunafunktiota, saadaan todellinen taivaan kulmatehospektrin muoto palautettua (vihreä käyrä). Validointitestien perusteella rekonstruoitu taivaan kulmatehospektri $\tilde{C}_\ell(reco)$ saadaan muodostettua tarkasti jokaiselle komponentille, joten näitä matriisi-ikkunafunktioita voidaan soveltaa todellisen taivaan signaalin rekonstruktioon. Tätä toimivaa matriisi-ikkunafunktiomallia on jo suositeltu käytettäväksi osana virallista Planckin data-analyysiketjua. Se tarjoaa uudenlaisen ja tarkan menetelmän Planckin ikkunafunktioissa havaittujen signaalivuotojen erotteluun tarkentaen näin taivaan kulmatehospektrien rekonstruktiota ja pohjimmiltaan nykykosmologialle merkittävien kosmologisten parametrien tarkkuutta.



(a) 70 GHz:n taivaan kulmatehospektien rekonstruktio.

(b) 70 GHz:n rekonstruoitujen kulmatehospektien ja simuloidun taivaan kulmatehospektien vertailukäyrät multipolille $\ell = 50$ asti.

Kuva 5.8: Kuuden paneelin kuvakollaasissa (a) vihreillä käyrillä esitetty 70 GHz:n käänteisen matriisi-ikkunafunktion W_ℓ^{-1} avulla tehtyjen simuloidun taivaan kulmatehospektien autokorrelaatioiden (TT,EE,BB; ylempi rivi) ja ristikorrelaatioiden (TE,TB,EB; alempi rivi) rekonstruktio. Punaiset käyrät kuvaavat havaittuja kulmatehospektrejä, joissa keilojen ja satelliitin skannausstrategian välinen vaikutus on mukana ja siniset käyrät esittävät simulaatioon syötettyjä taivaan kulmatehospektrejä. Rekonstruktio on onnistunut, kun vihreä käyrä kulkee mahdollisimman hyvin sinisen käyrän päällä. Kuvakollaasin (b) ensimmäisessä paneelissa vihreällä käyrällä esitetty TT:n havaitun kulmatehospektrin ja simuloidun taivaan kulmatehospektrin välinen suhde (kuvakollaasin (a) ensimmäisen paneelin vihreän ja sinisen käyrän suhde) ja viidessä muussa paneelissa on esitetty havaittujen kulmatehospektien ja simuloidun taivaan kulmatehospektien erotukset (kuvakollaasin (a) viiden muun paneelin vihreiden ja sinisten käyrien erotukset).

Luku 6

Yhteenvedo

Tämän tutkielman tutkimuskenttänä on kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn havaitseminen ja taustasäteilyn data-analyysi, erityisesti Planck-satelliitin matalan taajuuden instrumenttien erilaisista havaintokeiloista aiheutuvien signaalivuotojen vähentäminen ikkunafunktioista. Nämä ikkunafunktiot, joiden on tarkoitus kuvata puhtaasti satelliitin instrumenteista ja skannausstrategiasta aiheutuvia efektejä, ovat kriittisessä roolissa Planckin kulmatehospektrin arvioimisessa, sillä keiloista aiheutuvat efektit ovat kulmatehospektrin suuri systemaattisen virheen lähde. Nämä efektit tasoittavat taivaan pieniä epäisotropioita vaimentaen kulmatehospektrin korkeita multipoleja ja täten pyyhkivät pois tärkeää kosmologista informaatiota.

Tämä tutkielma on rakentunut karkeasti ottaen kolmeen osaan. Ensimmäisessä osassa on esitelty nykykosmologian teoreettista taustaa (luku 2), jotta lukijalle muodostuu käsitys teorian ja havaintojen välisestä yhteydestä. Tämä luku ei oletetusti kata hyvin laajaa aihepiiriä, vaan tarkoituksena on motivoida taustasäteilyanalyysin tutkimista.

Tämän tutkielman toinen osa (luvut 3 ja 4) keskittyy taustasäteilydatan analysointiin. Tässä osassa määritellään tämän tutkielman kannalta tärkeät keilat ja niihin läheisesti liittyvät skalaari- ja matriisi-ikkunafunktiot. Taustasäteilyanalyysin keskiössä on myös kartanteko varsinaisesta tai simuloidusta aikajärjestetystä datasta. Nämä taivaankartat sisältävät taustasäteilyä kartoittavan satelliitin keiloilla konvoloidun taivaan signaalin, josta voidaan multipoliekspansiolla kehittää lämpötilalle ja polarisaatiolle erikseen havaitut kulmatehospektrit. Koska havaitut kulmatehospektrit ovat verrannollisia keilojen ikkunafunktion ja taivaan kulmatehospektrin tuloon, saadaan taivaan signaali rekonstruoitua soveltamalla käänteistä ikkunafunktiota havaittuun kulmatehospektriin.

Vaikka keilan muoto tunnetaan, ei satelliitin skannausstrategiasta aiheutuvien efektien vuoksi keilojen ikkunafunktioita tunneta etukäteen, vaan ne voidaan arvioida tekemällä suuri joukko taivaan realisaatioita CMB Monte Carlo –simulaatiolla. Ideaalisesti ikkunafunktion tulisi puhtaasti kuvata satelliitin instrumenteista ja skannausstrategiasta aiheutuvia efektejä havaittuun kulmatehospektriin. Kuitenkin on huomattu, että usein käytetyt skalaari-ikkunafunktiot eivät anna tarkkaa kuvaa ikkunafunktioista, vaan satelliitin skannausstrategian ja instrumenteista aiheutuvien efektien lisäksi nämä riippuvat CMB Monte Carlo –simulaatioon syötetyistä kulmatehospektreistä ja täten aiheuttavat ikkunafunktioihin signaalivuotoa lämpötilan ja polarisaation välille. Tämän vuoksi tarvitaan uudenlainen malli skalaari-ikkunafunktioiden tilalle, mikä ei keskimäärin riipu simulaatioon syötetystä taivaan kulmatehospektristä. Tämä malli tunnetaan nimellä

matriisi-ikkunafunktio ja sen menetelmä ja menetelmän avulla lasketut matriisi-ikkunafunktiot on julkaistu viitteessä [37].

Kolmas osa (luku 5) painottuu matriisi-ikkunafunktion simuloimiseen ja tämän tutkielman päätuloksiin. Simulaatioiden lähtökohtana on oletus, etteivät matriisi-ikkunafunktiot riipu keskimäärin simulaatioon syötetyistä taivaan kulmatehospektreistä, joten mielivaltaisen muotoista kulmatehospektrien mallia voidaan käyttää matriisi-ikkunafunktion elementtien arvioimiseen, kunhan Monte Carlo –realisaatioita on tarpeeksi. Kuitenkin taivaan lämpötilan ja polarisaation kulmatehospektrien malliksi on järkevintä valita vakioarvoinen kulmatehospektri, jotta vältytään epätarkoilta matriisi-ikkunafunktion arvioimisilta kohdissa, joissa jonkin kulmatehospektrin arvo on poikkeuksellisen pieni.

Tämän tutkielman matriisi-ikkunafunktiot arvioitiin 25 CMB Monte Carlo –realisaatiolla jokaiselle pääkeilalle, pääkeilan ja läheisen sivukeilan yhdistelmälle ja koko keilalle erikseen 30, 44 ja 70 GHz:lla. Tämän lisäksi tehtiin kahdeksan eri yksittäisen realisaation 44 GHz:n pääkeilan simulaatiota, joissa varioitiin radiometrien keilojen elliptisyyksiä ja FWHM:iä. Tällä tavoin tutkittiin, miten näiden kahden parametrin muutokset vaikuttavat signaalivuotoihin eli matriisi-ikkunafunktion elementteihin. Etualan säteilylle signaalivuodot on ymmärretty saman torven M ja S radiometrien välisten erojen aiheuttamaksi [45]. Kuitenkin CMB Monte Carlo –simulaatioiden tuloksista havaittiin, että saman torven M ja S radiometrien erilaiset keilan muodot eivät yksinään riitä selittämään signaalivuotoa, vaan myös erot torvien välillä aiheuttavat sitä. Lisäksi huomattiin, että saman torven radiometrien keilojen pienet erot elliptisyydessä kääntävät tiettyjen vuotoelementtien käyrät päinvastaisiksi riippuen kumman radiometrin elliptisyys on suurempi.

Lopuksi, matriisi-ikkunafunktiot validoitiin soveltamalla käänteistä matriisi-ikkunafunktiota todellista taivasta vastaavaan yksittäiseen CMB Monte Carlo –realisaatioon. Tästä saadut tulokset osoittavat, että matriisi-ikkunafunktioilla voidaan rekonstruoida alkuperäiset taivaan kulmatehospektrit niin lämpötilalle kuin polarisaatiolle. Rekonstruoidun lämpötilan autokorrelaatioiden kulmatehospektrin, $\tilde{C}_\ell^{TT}(reco)$:n, suhteellinen poikkeama taivaan kulmatehospektristä on matalilla multipoleilla $\ell \lesssim 50$ korkeintaan $\sim 2 \times 10^{-3}$, $\sim 3.5 \times 10^{-3}$ ja $\sim 3 \times 10^{-3}$ taajuuksilla 30, 44 ja 70 GHz, kun keiloina käytetään pääkeiloja. Muiden korrelaatioiden erot rekonstruoidun ja taivaan kulmatehospektrin välillä ovat matalilla multipoleilla suurimmillaan 30 GHz:lle $\sim 0.7 \mu K^2$ (TE:ssä, kun $\ell = 2$), 44 GHz:lle $\sim 0.08 \mu K^2$ ja 70 GHz:lle $\sim 0.07 \mu K^2$. Näiden erot ovat kuitenkin pieniä verrattuna kosmiseen varianssiin ja residuaalikohtaan. Kulmatehospektrien rekonstruktio pääkeiloilla toimii 30 GHz:lla $\ell \sim 800$ (BB:lle $\ell \sim 600$), 44 GHz:lle $\ell \sim 900$ ja 70 GHz:lle $\ell \sim 1700$ asti. Läheisten ja etäisten sivukeilojen huomioon ottaminen ei merkittävästi paranna tuloksia.

Vaikka tässä tutkielmassa rajoituttiin tarkastelemaan Planckin matalan taajuuden instrumenttien keiloja ja puhdasta taustasäteilyn signaalia, soveltuu matriisi-ikkunafunktion malli yhtä lailla Planckin korkean taajuuden instrumenteille, etualan säteilyn vuotokomponenttien erotteluun, ja toisten monimutkaisen polttotasokonfiguraation omaavien taustasäteilyä kartoittavien satelliittien, kuten WMAPin, data-analyysiin. Planckin perintö tarkkuuskosmologialle on riippuvainen sen analyysiketjussa käytetyistä menetelmistä. Tässä tutkielmassa esiteltyä matriisi-ikkunafunktion mallia on kaavailtu osaksi Planckin virallista data-analyysiketjua, ja sen toivotaan jo olevan mukana tulevissa vuoden 2016 Planck-julkaisuissa.

Kirjallisuutta

- [1] A. A. Penzias and R. W. Wilson. *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*. ApJ, 142:419–421, 1965.
- [2] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, et al. *Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps*. ApJ, 396:L1–L5, 1992.
- [3] The Planck Collaboration. *The Scientific Programme of Planck (Blue Book)*. arXiv:astro-ph/0604069, 2006.
- [4] Planck Collaboration I. *Planck 2013 results: Overview of Planck Products and Scientific Results (p01)*. A&A, 2013.
- [5] E. Hubble. *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*. Proceedings of the National Academy of Science, 15:168–173, 1929.
- [6] R. Adam et al. *Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results*. arXiv:1502.01582 [astro-ph.CO], 2015.
- [7] A. Friedmann. *Über die Krümmung des Raumes*. Zeitschrift für Physik, 10:377–386, 1922.
- [8] G. Lemaître. *L’Univers en expansion*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 53:51, 1933.
- [9] H. P. Robertson. *Kinematics and World-Structure*. ApJ, 82:284, 1935.
- [10] H. P. Robertson. *Kinematics and World-Structure II*. ApJ, 83:187, 1936.
- [11] H. P. Robertson. *Kinematics and World-Structure III*. ApJ, 83:257, 1936.
- [12] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO], 2015.
- [13] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [14] S. Perlmutter et al. *Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications*. Nature, 391:51–54, 1998.
- [15] A. G. Riess et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astron.J., 116:1009–1038, 1998.

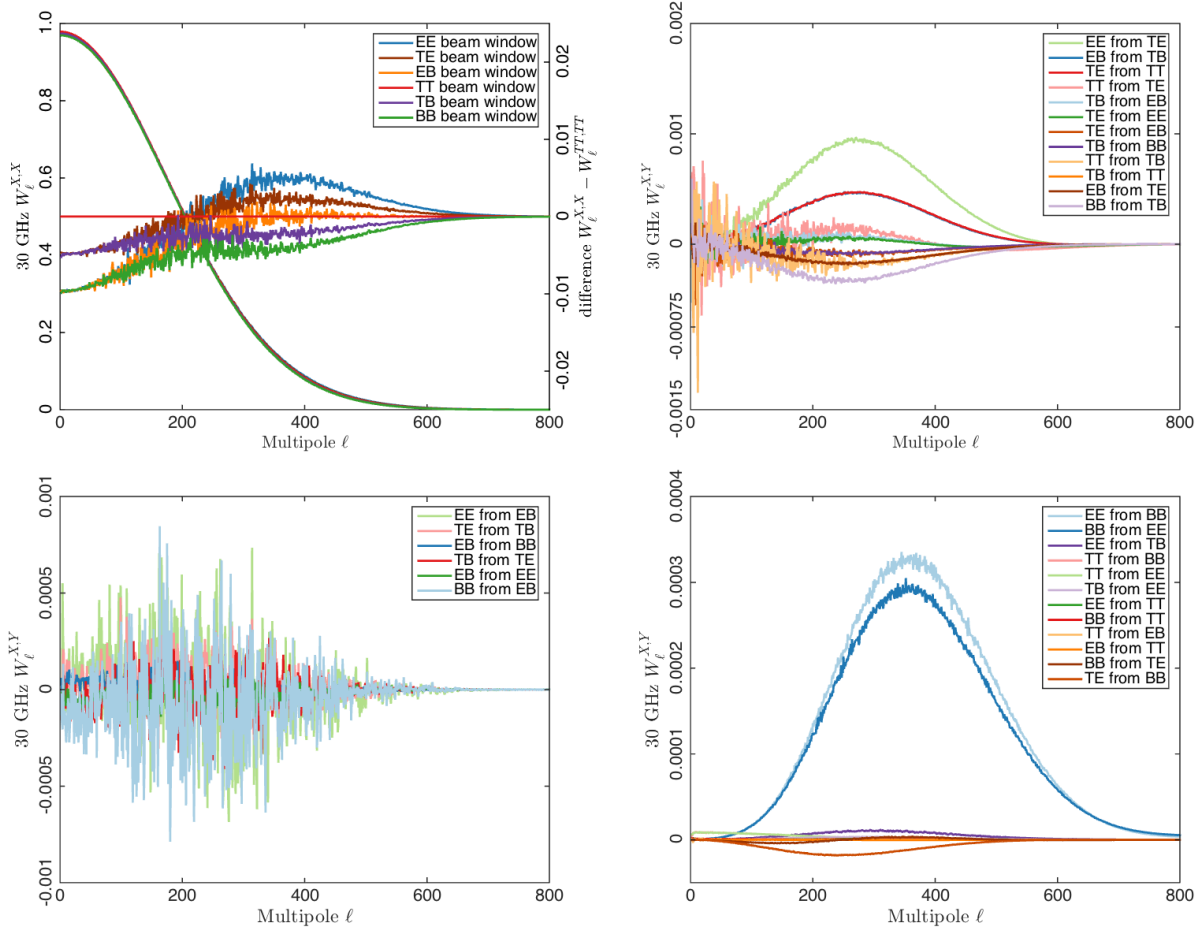
- [16] B. P. Schmidt et al. *The High Z supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae*. ApJ, 507:46–63, 1998.
- [17] A. A. Starobinsky. *Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe*. ZhETF Pisma Redaktsiiu, 30:719–723, 1979.
- [18] A. A. Starobinsky. *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*. Phys. Lett., B91:99–102, 1980.
- [19] A. H. Guth. *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*. Phys. Rev., D23:347–356, 1981.
- [20] A. D. Linde. *Chaotic Inflating Universe*. JETP Lett., 38:176–179, 1983.
- [21] A. H. Guth. *Eternal inflation and its implications*. J. Phys., A40:6811–6826, 2007.
- [22] J Preskill. *Cosmological Production of Superheavy Magnetic Monopoles*. Phys. Rev. Lett., 43:1365, 1979.
- [23] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity*. arXiv:1502.01592 [astro-ph.CO], 2015.
- [24] S. Räsänen. *Cosmology I & II. Luentomuistiinpanot 2014*. http://theory.physics.helsinki.fi/~cosmology/cosmo2014_12.pdf.
- [25] H. Kurki-Suonio. *Lecture notes on Cosmological Perturbation theory*. <http://www.helsinki.fi/~hkurkisu/CosPer.pdf>.
- [26] M. Reinecke, K. Dolag, R. Hell, M. Bartelmann, and T. A. Enßlin. *A simulation pipeline for the Planck mission*. A&A, 445:373, 2006.
- [27] H. Kurki-Suonio. *CMB Physics Lecture Notes, 2007*. <http://www.helsinki.fi/~hkurkisu/cmbphysics/notes2007/Y5.pdf>.
- [28] Arthur Kosowsky. *Introduction to microwave background polarization*. New Astron. Rev., 43:157, 1999.
- [29] M. Savelainen. *Characterization of Primordial Perturbations by Observations*. PhD thesis, Helsingin yliopisto, 2014.
- [30] M. Bersanelli et al. *Planck pre-launch status: Design and description of the Low Frequency Instrument*. A&A, 520:A4, 2010.
- [31] Planck Collaboration, N. Aghanim, et al. *Planck 2013 results. IV. Low Frequency Instrument beams and window functions*. A&A, 571:A4, 2014.
- [32] Ansari et al. *Planck parameter definition document (draft 2003-10-23)*. Technical report, ESA, 2003.

- [33] R. S. Hill et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Beam Maps and Window Functions*. ApJS, 180:246–264, 2009.
- [34] K. M. Huffenberger et al. *Measuring Planck beams with planets*. A&A, 510:A58, 2010.
- [35] M. R. Nolta et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Angular Power Spectra*. ApJS, 180:296–305, 2009.
- [36] L. Page, C. Barnes, Hinshaw, et al. *First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Beam Profiles and Window Functions*. ApJS, 148:39–50, 2003.
- [37] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. IV. Low Frequency Instrument beams and window functions*. arXiv:1502.01584 [astro-ph.CO], 2015.
- [38] D. M. Brink and G. R. Satchler. *Angular Momentum*. Oxford University Press, Oxford, 1968.
- [39] T. Risbo. *Fourier transform summation of Legendre series and D-functions*. Journal of Geodesy, 70(383), 1996.
- [40] C. Burigana, D. Maino, N. Mandolesi, et al. *Beam distortion effects on anisotropy measurements of the cosmic microwave background*. A&As, 130:551–560, 1998.
- [41] P. Fosalba, O. Dore, and F. R. Bouchet. *Elliptical beams in CMB temperature and polarization anisotropy experiments: An Analytic approach*. Phys. Rev., D65:063003, 2002.
- [42] T. Poutanen. *Making and Power Spectrum Estimation for Cosmic Microwave Background Temperature Anisotropies*. PhD thesis, Helsingin yliopisto, 2005.
- [43] Planck Collaboration III. *Planck 2013 results: LFI systematic uncertainties (p02a)*. A&A, 2013.
- [44] Sanjit Mitra, Anand S. Sengupta, and Tarun Souradeep. *CMB power spectrum estimation using non-circular beam*. Phys. Rev., D70:103002, 2004.
- [45] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. III. LFI systematic uncertainties*. arXiv:1507.08853 [astro-ph.CO], 2015.
- [46] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. V. LFI calibration*. arXiv:1505.08022 [astro-ph.IM], May 2015.
- [47] K. M. Gorski, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, E. Hivon, and A. J. Banday. *The HEALPix Primer*. arXiv:astro-ph/9905275, 1999.
- [48] E. Keihänen, R. Kesitalo, H. Kurki-Suonio, T. Poutanen, and A.-S. Sirviö. *Making cosmic microwave background temperature and polarization maps with MADAM*. A&A, 510:A57, 2010.
- [49] C. Burigana, M. Malaspina, N. Mandolesi, L. Danse, D. Maino, M. Bersanelli, and M. Maltoni. *A preliminary study on destriping techniques of PLANCK/LFI measurements versus observational strategy*. arXiv:astro-ph/9906360, 1999.

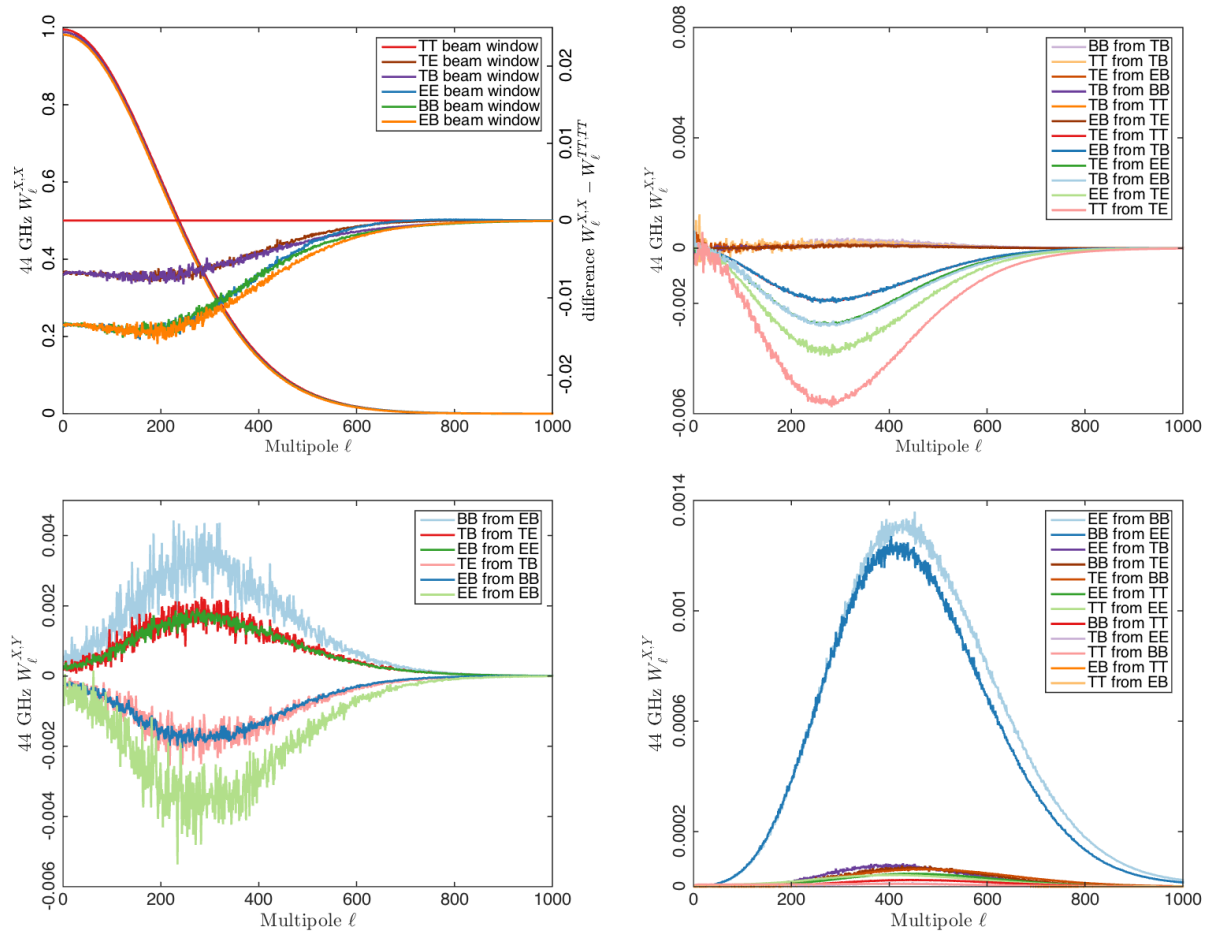
- [50] J. Delabrouille. *Analysis of the accuracy of a destriping method for future cosmic microwave background mapping with the PLANCK SURVEYOR satellite*. A&As, 127:555–567, 1998.
- [51] Maino, D. and Burigana, C. and Gorski, K. M. and others. *Removing $1/f$ noise stripes in cosmic microwave background anisotropy observations*. A&A, 387:356–365, 2002.
- [52] Revenu, B. and Kim, A. and Ansari, and others. *Destriping of polarized data in a CMB mission with a circular scanning strategy*. A&As, 142:499–509, 2000.
- [53] Sbarra, C. and Carretti, E. and Cortiglioni, S. and others. *An iterative destriping technique for diffuse background polarization data*. A&A, 401:1215–1222, 2003.
- [54] Poutanen, T. and Maino, D. and Kurki-Suonio, H. and Keihänen, E. and Hivon, E. *Cosmic microwave background power spectrum estimation with the destriping technique*. MNRAS, 353:43–58, 2004.
- [55] Keihänen, E. and Kurki-Suonio, H. and Poutanen, T. and Maino, D. and Burigana, C. *A maximum likelihood approach to the destriping technique*. A&A, 428:287–298, 2004.
- [56] Lindholm V. *Instrumenttikohina taustasäteilyanalyysissä*. Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, 2014.
- [57] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. *Planck 2015 results. VI. LFI mapmaking*. arXiv:1502.01585 [astro-ph.CO], 2015.
- [58] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2nd edition, 2003.
- [59] Sirviö A-S. *Analyzing the Cosmic Microwave Background Radiation*. Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, 2010.

Liite A

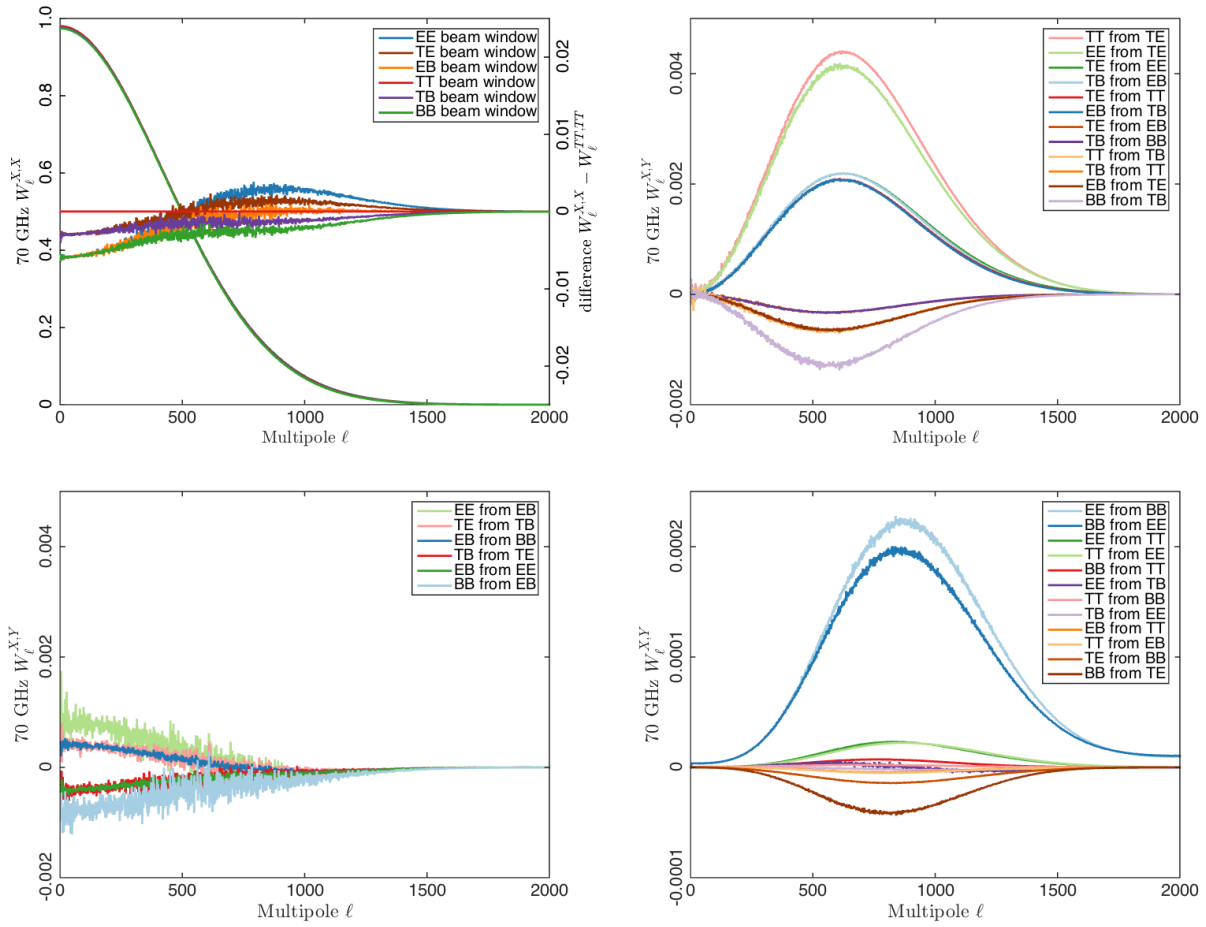
Liitteet



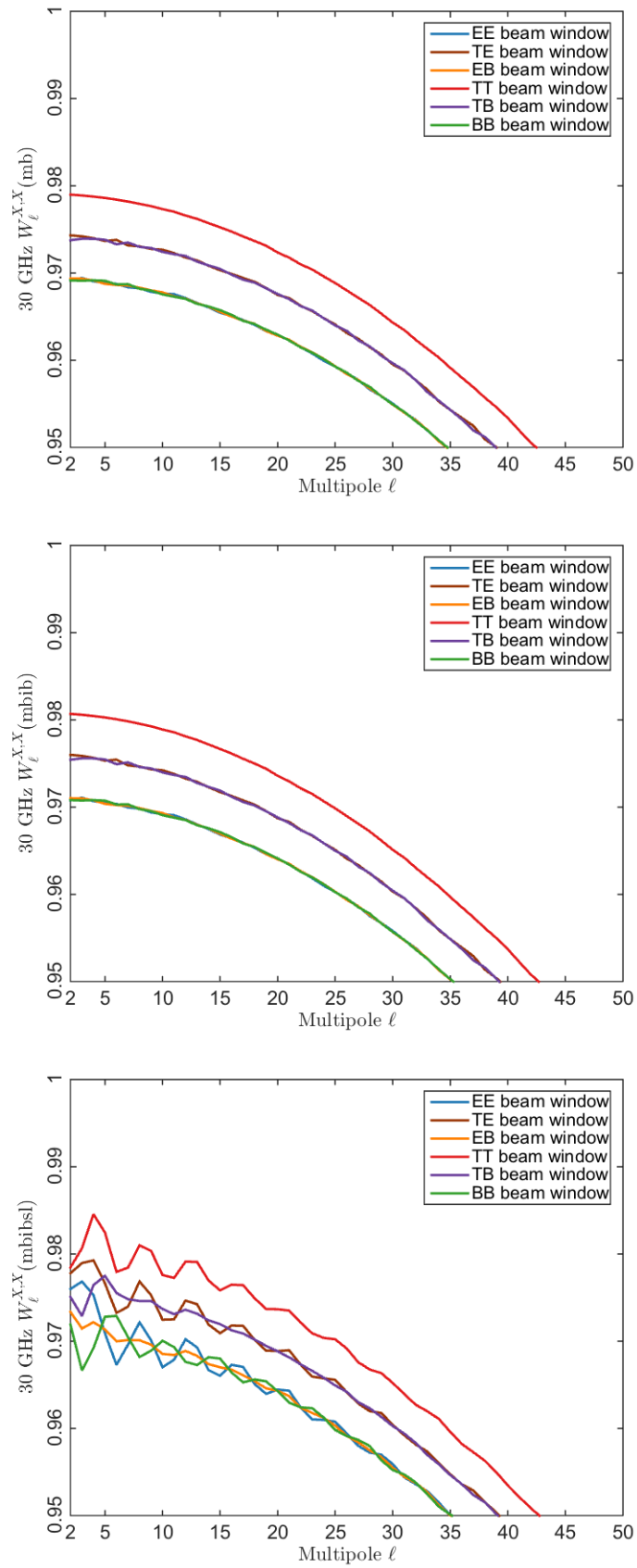
Kuva A.1: 30 GHz:n pääkeilasta lasketut matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit ensimmäisessä paneelissa ja ei-diagonaalelementit kolmessa muussa paneelissa. Kuvissa $X, Y = TT, EE, BB, TE, TB, EB$ ja $W_\ell^{X,Y}$ tarkoittavat vuotoa komponentista Y komponentille X . Koska diagonaalelementit ovat keskenään likimain yhtäsuuret, on ensimmäisessä paneelissa laskettu myös erokäyrät TT -komponenttiin nähden. Nämä erokäyrät kulkevat lähellä nollalinjaa, ja niiden asteikko näkyy ensimmäisen paneelin oikeassa reunassa. Ei-diagonaalelementit on jaoteltu kolmeen kategoriaan: Ne vuotokomponentit, jotka ovat suurimmillaan multipoliskaalan keskivaiheilla ovat esitetty oikealla ylärivissä, ne komponentit, jotka ovat multipoliskaalassa suurimmillaan matalilla multipoleilla ovat esitetty vasemmalla alarivissä. Komponentit, jotka ovat pienimmillään koko multipoliskaalalla ovat esitetty oikealla alarivissä. Koska useimmat käyrät kulkevat päällekkäin, on käyrien selkeyttämiseksi kuvatekstien komponentit esitetty silmämääräisesti suuruusjärjestyksessä suurimmasta pienimpään.



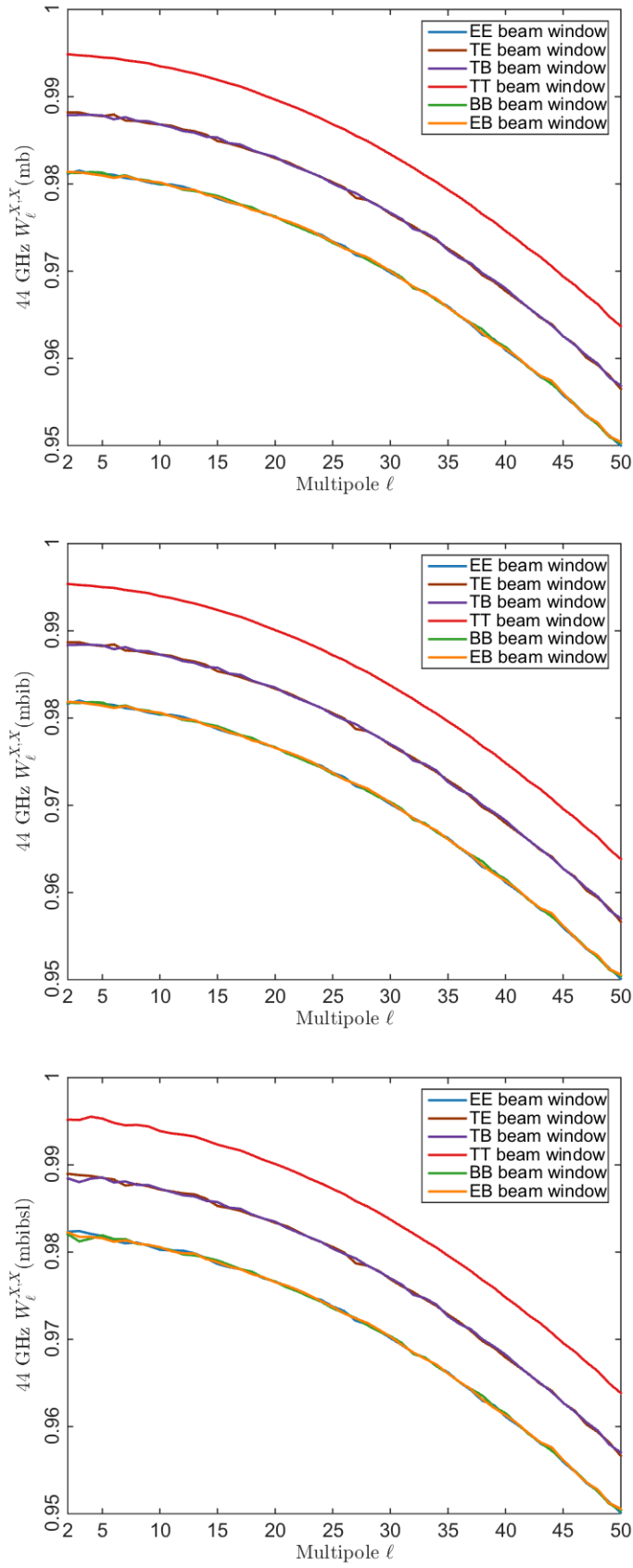
Kuva A.2: 44 GHz:n pääkeilasta lasketut matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit ensimmäisessä paneelissa ja ei-diagonaalelementit kolmessa muussa paneelissa.



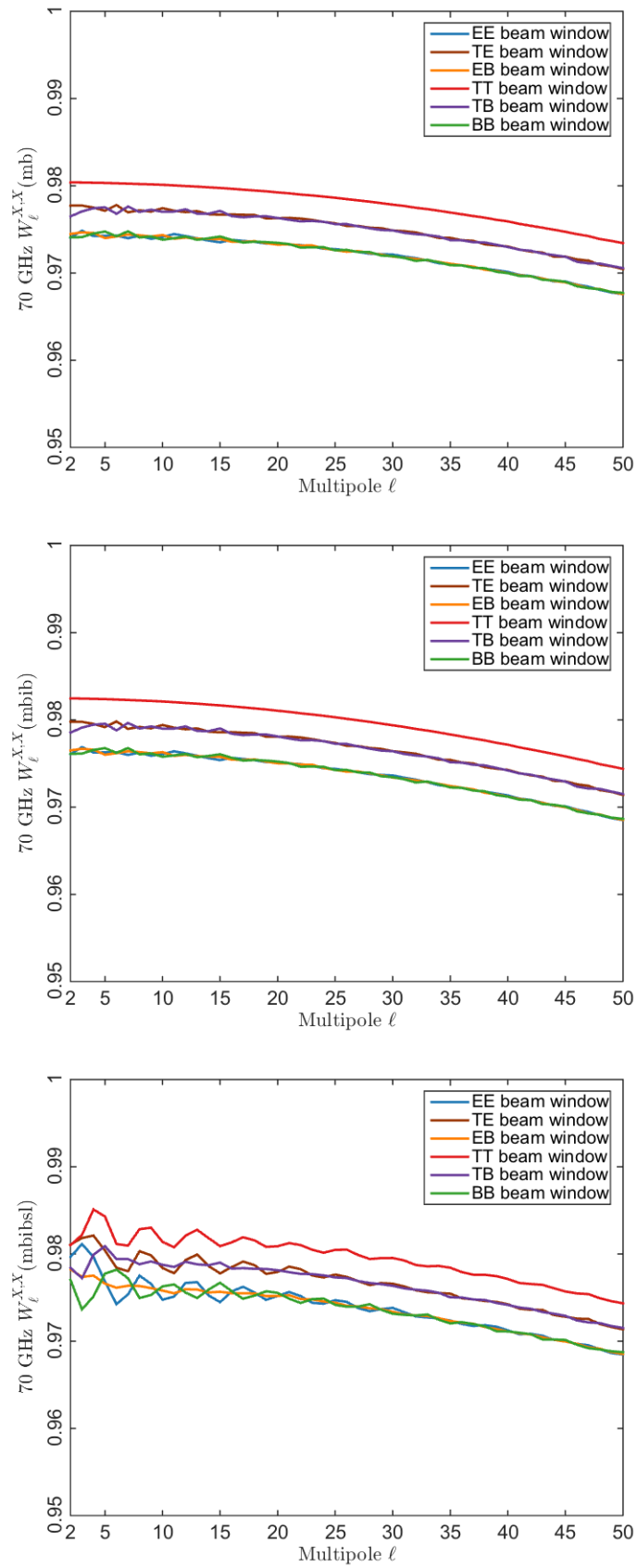
Kuva A.3: 70 GHz:n pääkeilasta lasketut matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit ensimmäisessä paneelissa ja ei-diagonaalelementit kolmessa muussa paneelissa.



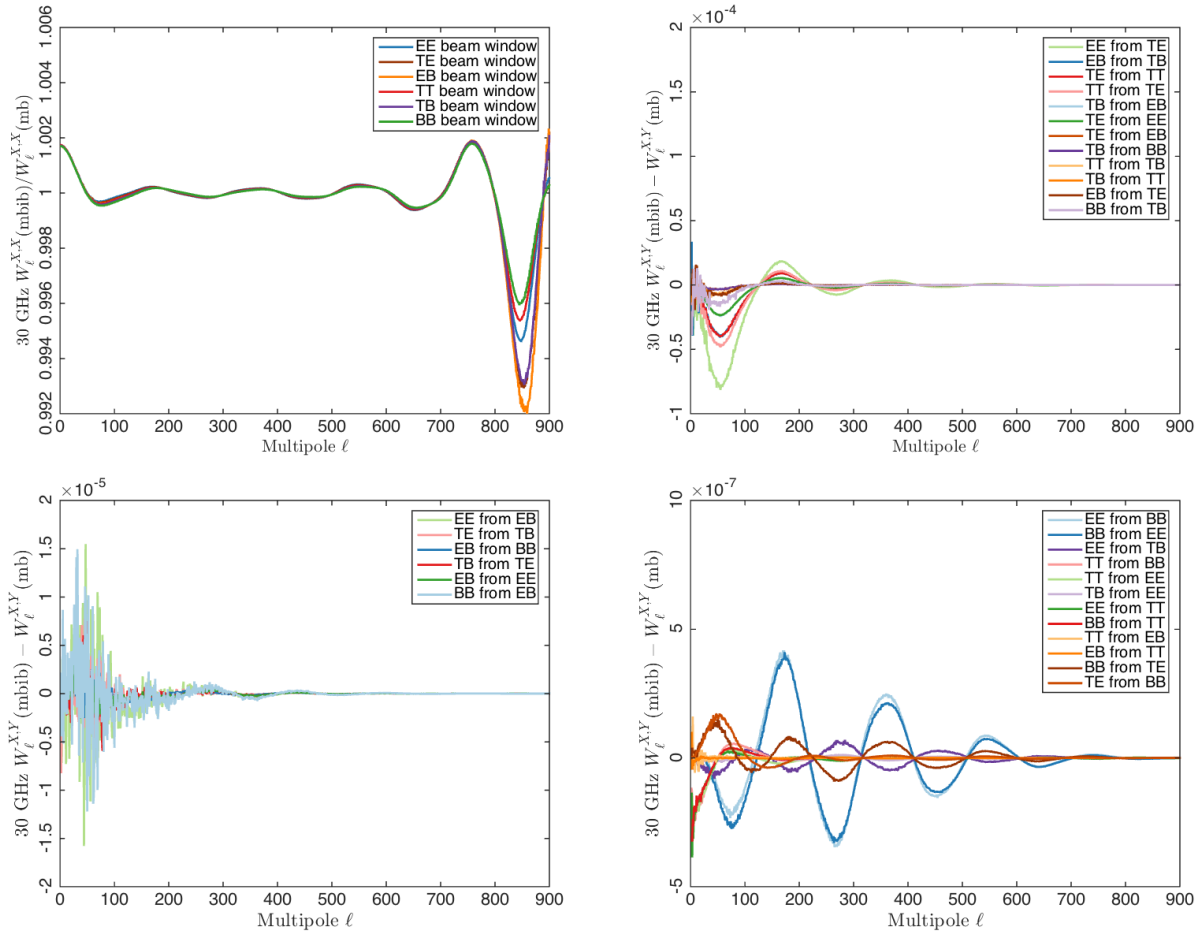
Kuva A.4: 30 GHz:n matriisi-ikkunafunktioiden diagonaalelementit esitettynä ensimmäiselle 50:lle multipolille. Ylimpänä matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementit esitettynä pääkeilalle, keskellä diagonaalelementit esitettynä pääkeilan ja läheisen sivukeilan yhdistelmälle ja alimpana diagonaalelementit esitettynä koko keilalle.



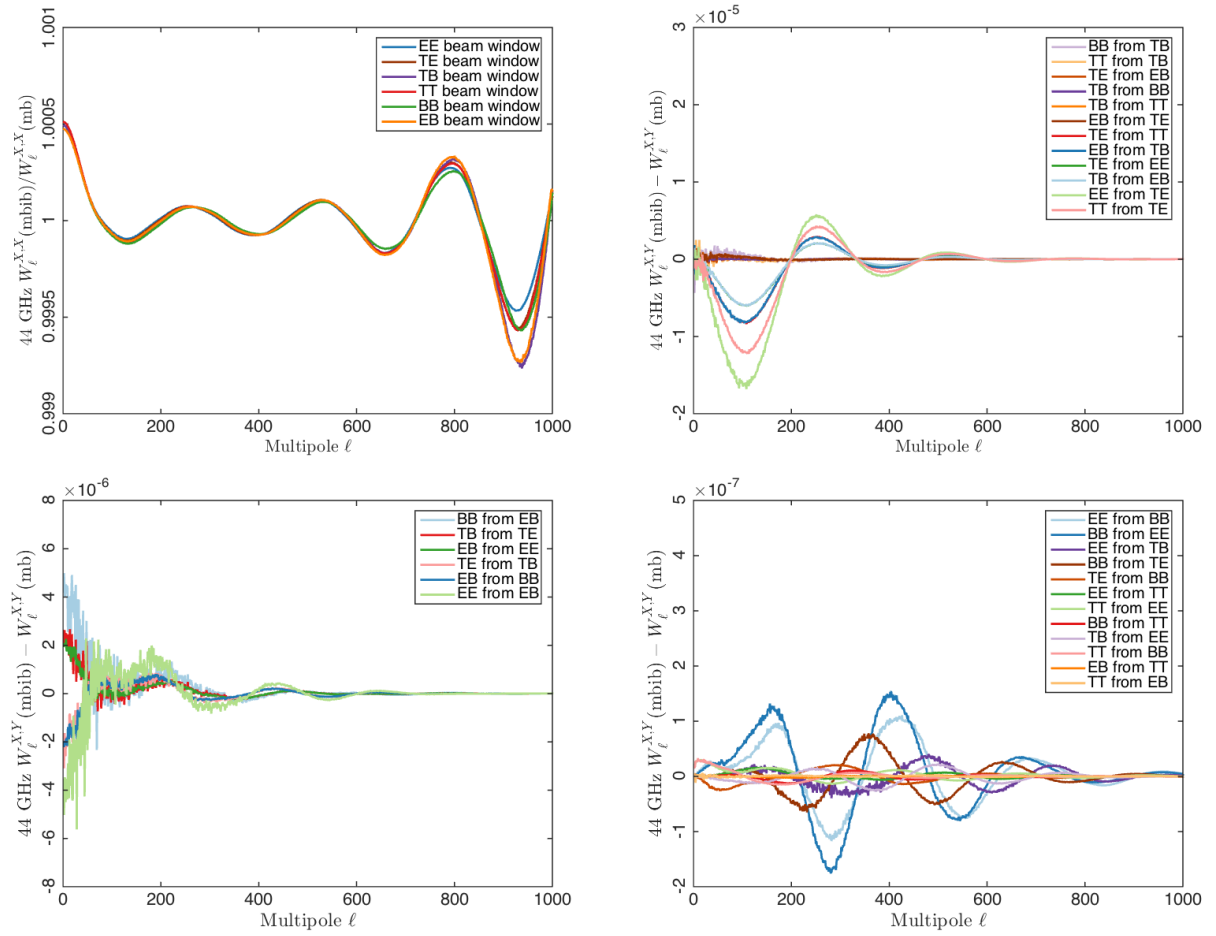
Kuva A.5: 44 GHz:n matriisi-ikkunafunktioiden diagonaalelementit esitettynä ensimmäiselle 50:lle multipolille.



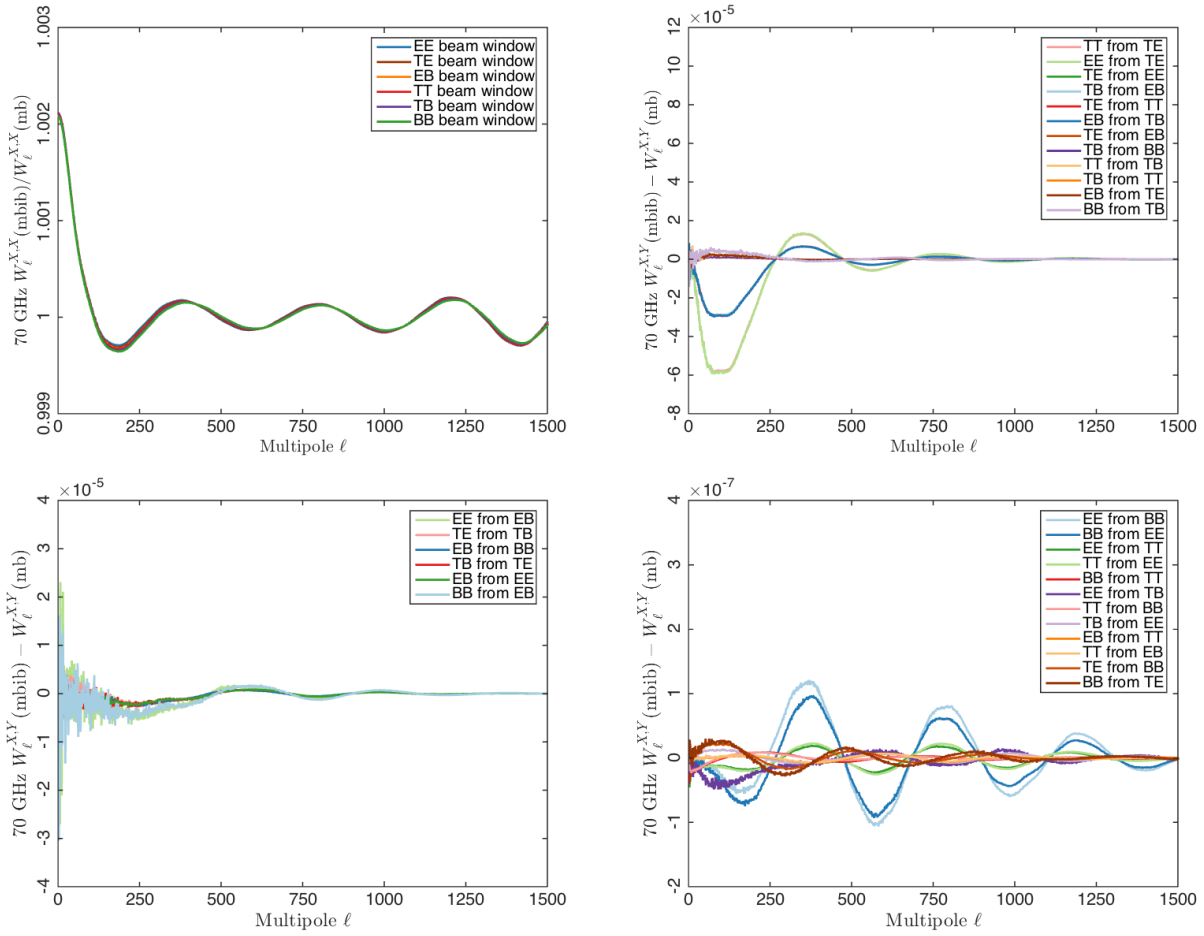
Kuva A.6: 70 GHz:n matriisi-ikkunafunktioiden diagonaalelementit esitettynä ensimmäiselle 50:lle multipolille.



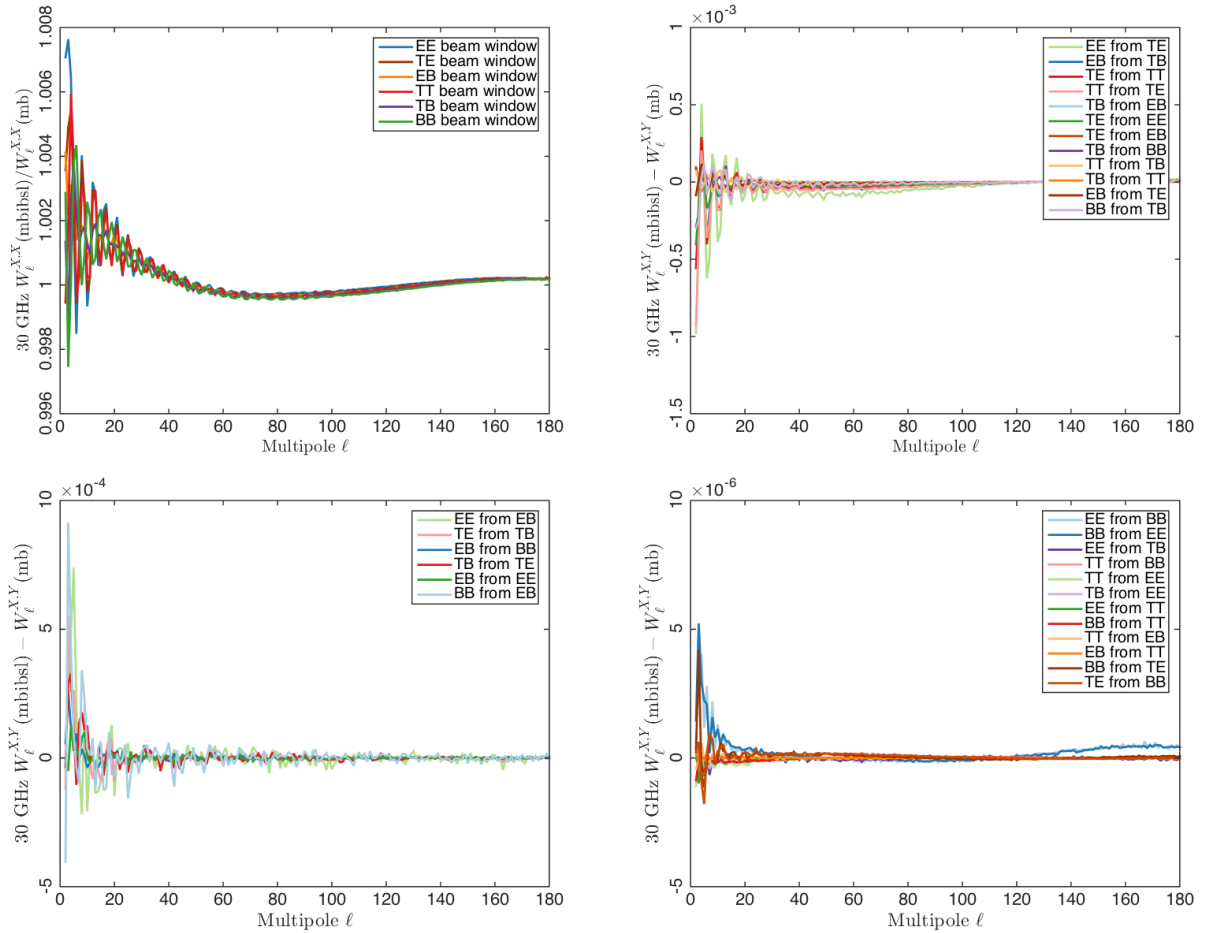
Kuva A.7: 30 GHz:n pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmästä saatujen matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementtien suhde pelkistä pääkeiloista saatuihin diagonaalelementteihin (ensimmäinen paneeli) ja vaikutukset pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän erotuksista pääkeiloihin (kolme muuta paneelia).



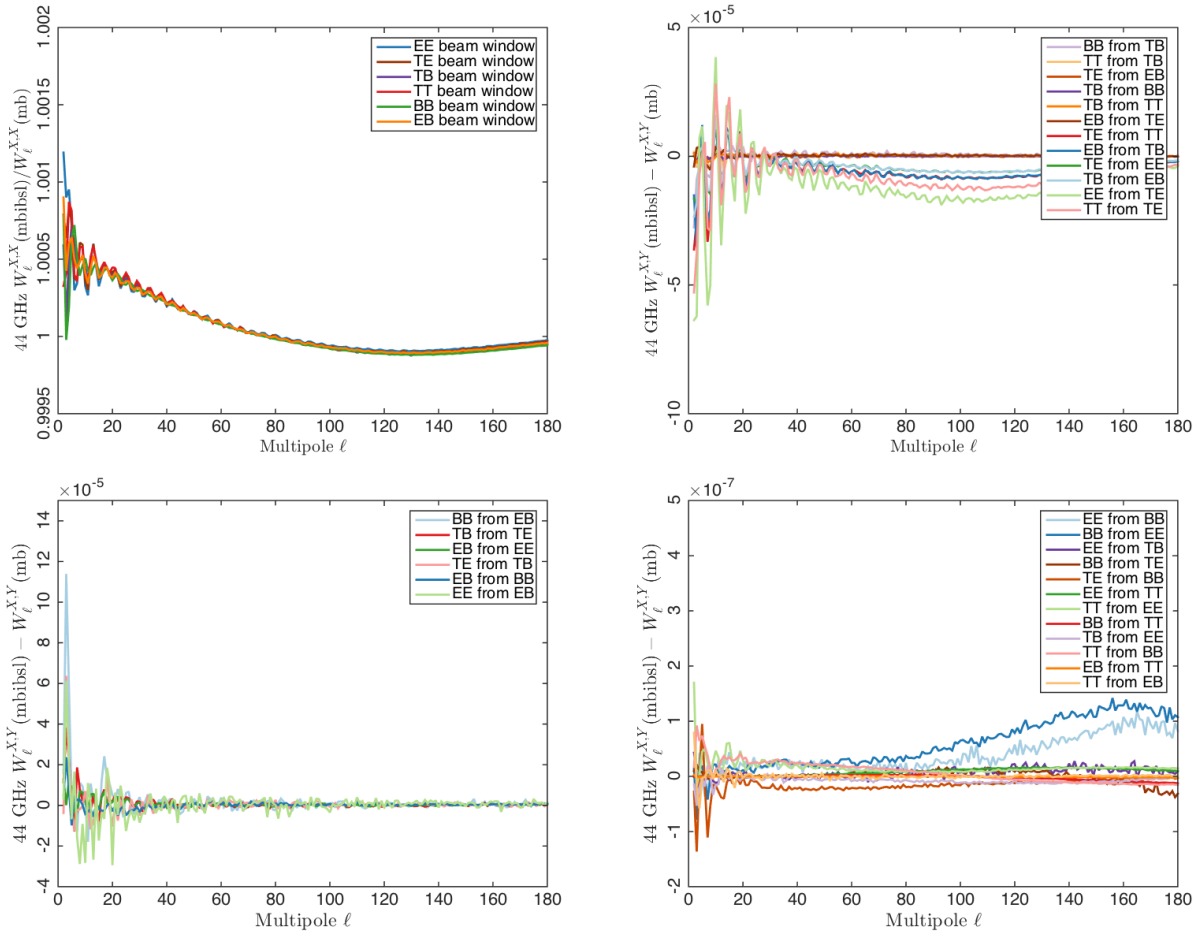
Kuva A.8: Pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän vaikutukset diagonaalelementteihin ja ei-diagonaalelementteihin 44 GHz:lla.



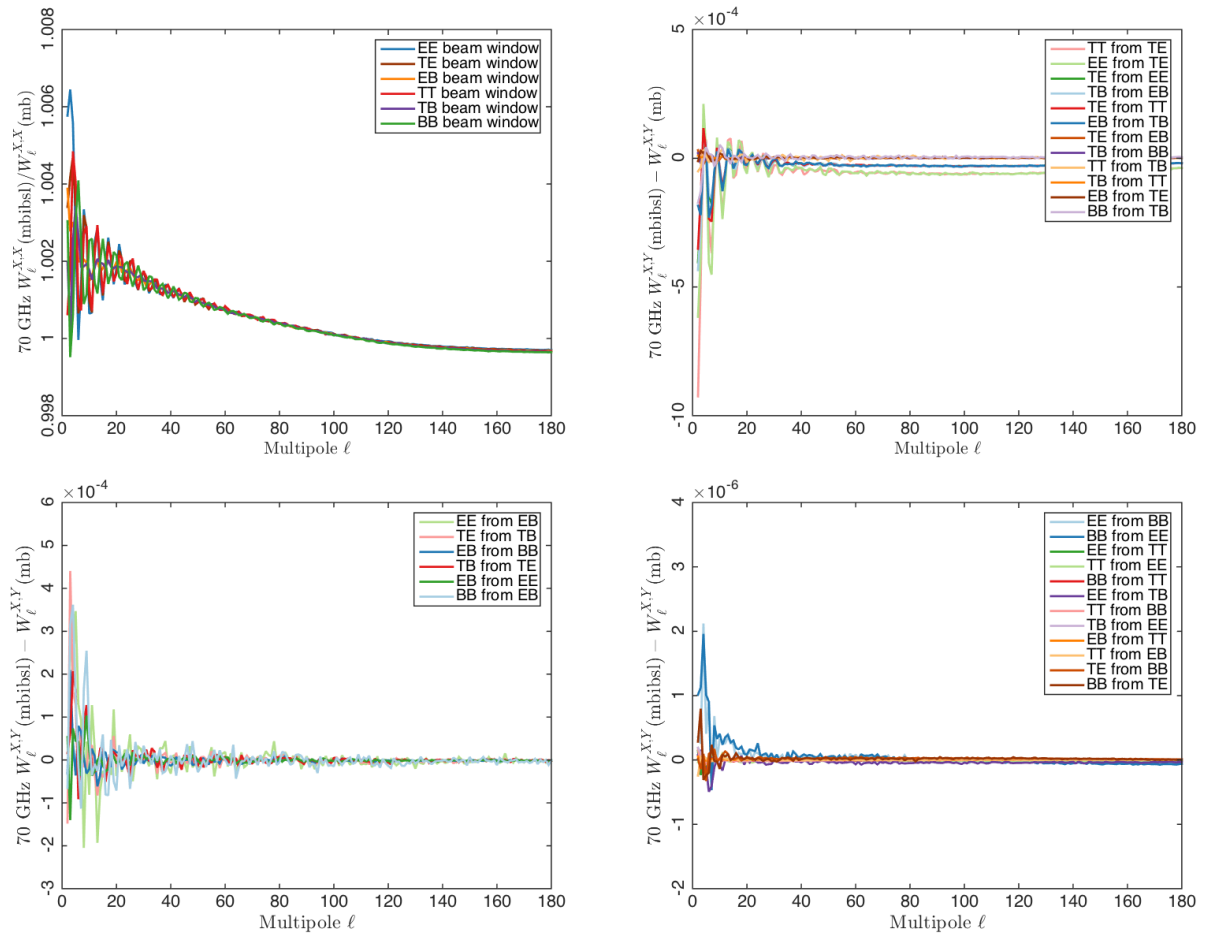
Kuva A.9: Pääkeilojen ja läheisten sivukeilojen yhdistelmän vaikutukset diagonaalelementteihin ja ei-diagonaalelementteihin 70 GHz:lla.



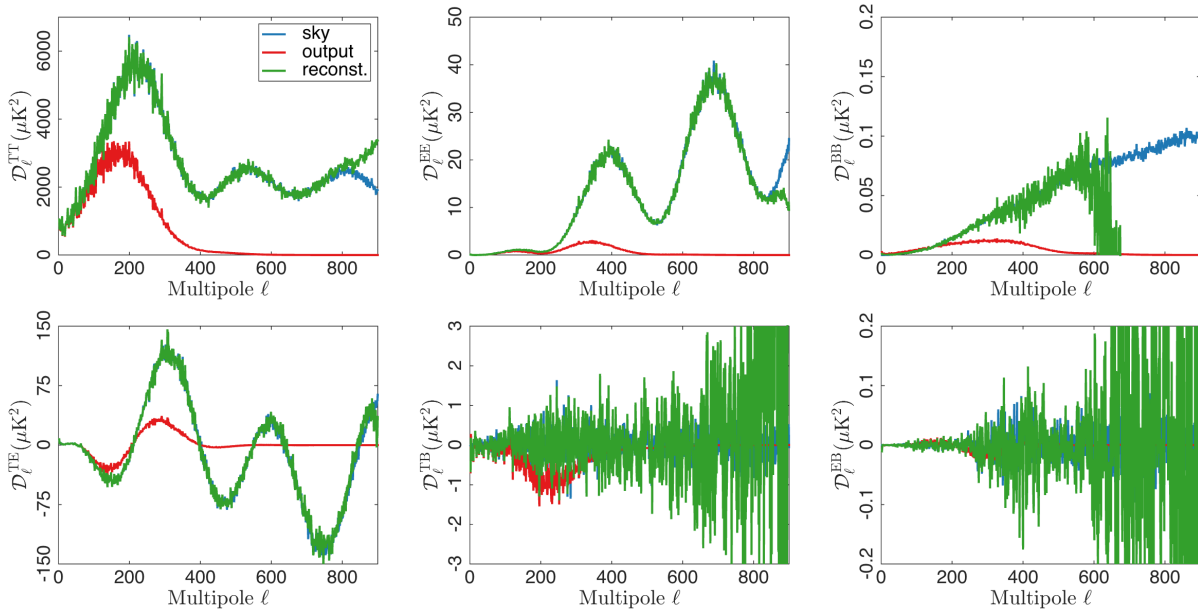
Kuva A.10: 30 GHz:n pääkeilan ja etäisten sivukeilan yhdistelmästä saatujen matriisi-ikkunafunktion diagonaalelementtien suhde pelkistä pääkeiloista saatuihin diagonaalelementteihin (ensimmäinen paneeli) ja vaikutukset koko keilan erotuksista pääkeiloihin (kolme muuta paneelia).



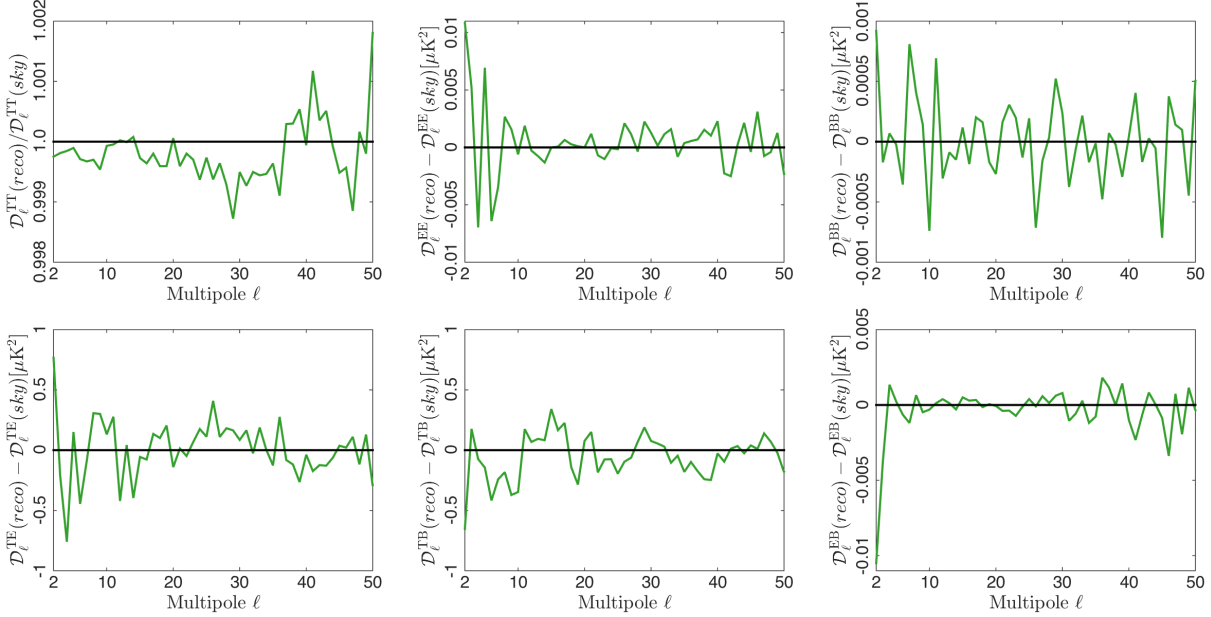
Kuva A.11: Pääkeilojen ja etäisten sivukeilojen yhdistelmän vaikutukset diagonaalelementteihin ja ei-diagonaalelementteihin 44 GHz:lla.



Kuva A.12: Pääkeilojen ja etäisten sivukeilojen yhdistelmän vaikutukset diagonaalelementteihin ja ei-diagonaalelementteihin 70 GHz:lla.

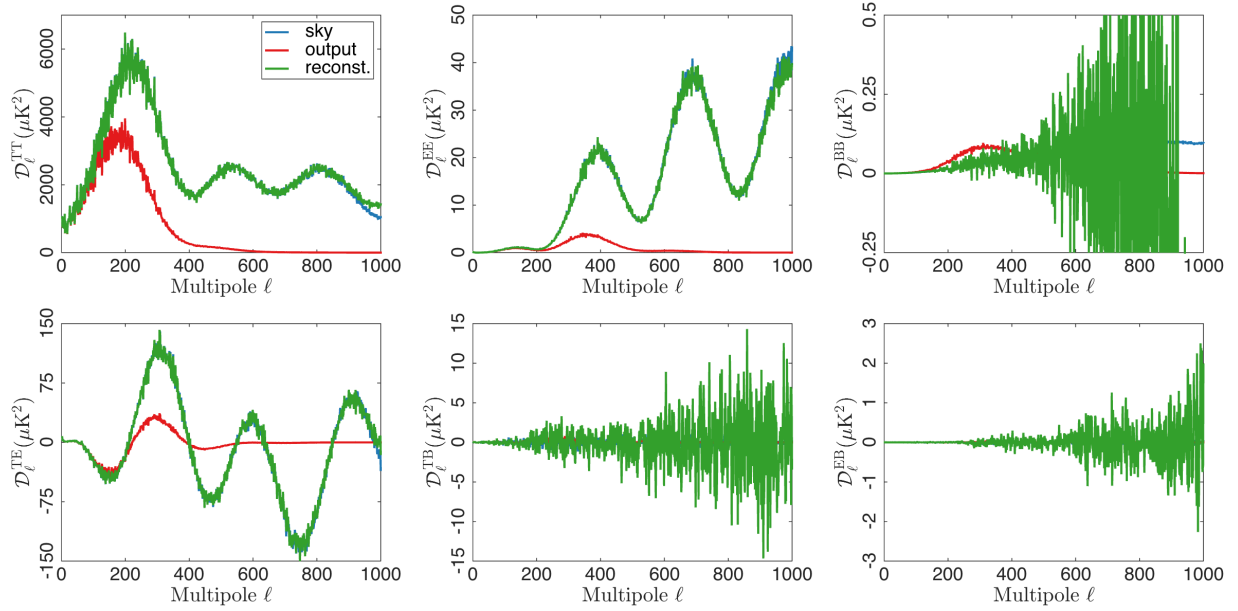


(a) 30 GHz:n rekonstruoitu C_ℓ (vihreällä), simuloidun taivaan C_ℓ (sinisellä) ja havaittu C_ℓ (punaisella).

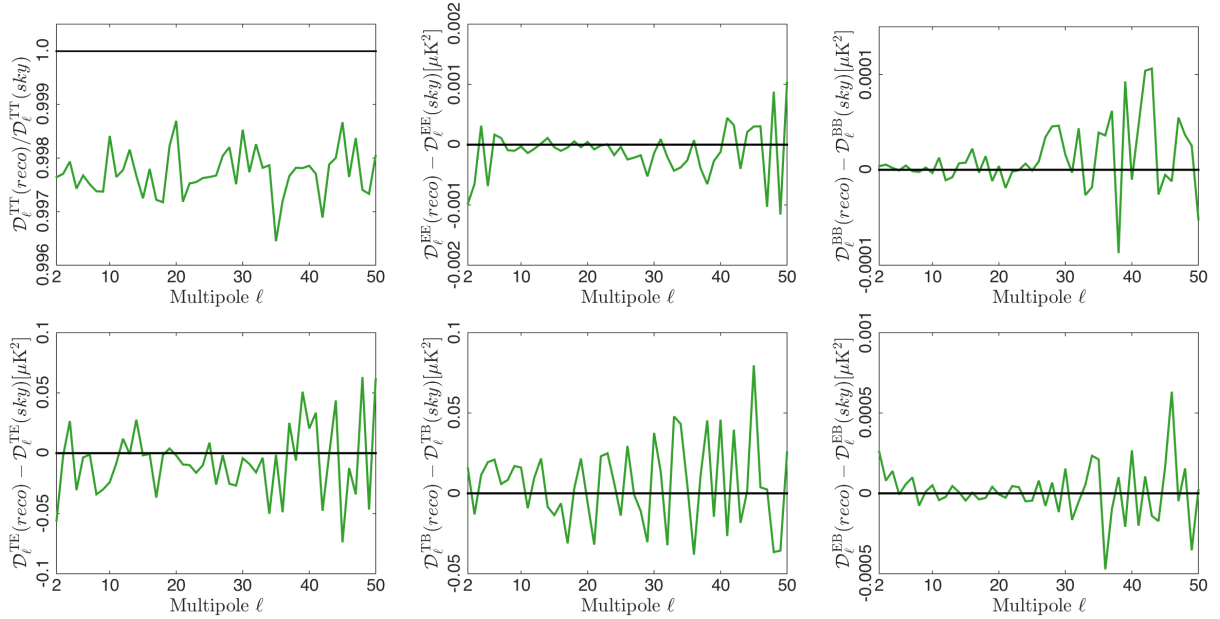


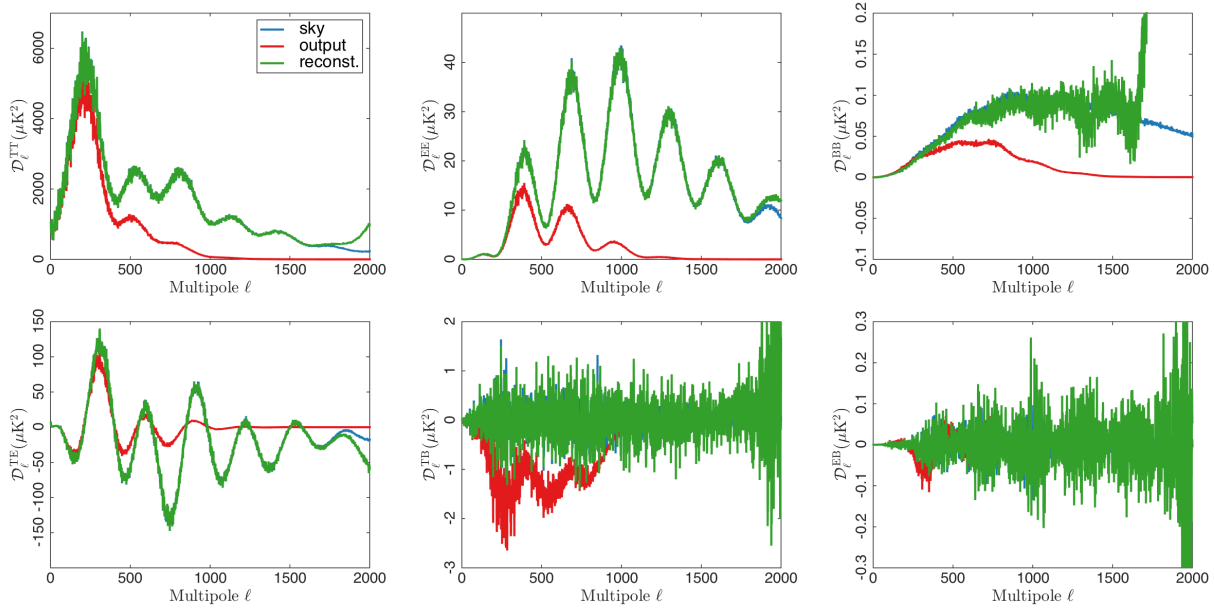
(b) 30 GHz:n rekonstruoitujen kulmatehospektien ja simuloidun taivaan kulmatehospektien vertailukäyrät multipolille $\ell = 50$ asti.

Kuva A.13: Kuuden paneelin kuvakollaasissa (a) vihreillä käyrillä esitetty 30 GHz:n käänteisen matriisi-ikkunafunktion W_ℓ^{-1} avulla tehtyjen simuloidun taivaan kulmatehospektien autokorrelaatioiden (TT,EE,BB; ylempi rivi) ja ristikorrelaatioiden (TE,TB,EB; alempi rivi) rekonstruktio. Punaiset käyrät kuvaavat havaittuja kulmatehospektrejä, joissa keilojen ja satelliitin skannausstrategian välinen vaikutus on mukana ja siniset käyrät esittävät simulaatioon syötettyjä taivaan kulmatehospektrejä. Rekonstruktio on onnistunut, kun vihreä käyrä kulkee mahdollisimman hyvin sinisen käyrän päällä. Kuvakollaasin (b) ensimmäisessä paneelissa vihreällä käyrällä esitetty TT:n havaitun kulmatehospektrin ja simuloidun taivaan kulmatehospektrin välinen suhde (kuvakollaasin (a) ensimmäisen paneelin vihreän ja sinisen käyrän suhde) ja viidessä muussa paneelissa on esitetty havaittujen kulmatehospektien ja simuloidun taivaan kulmatehospektien erotukset (kuvakollaasin (a) viiden muun paneelin vihreiden ja sinisten käyrien erotukset).

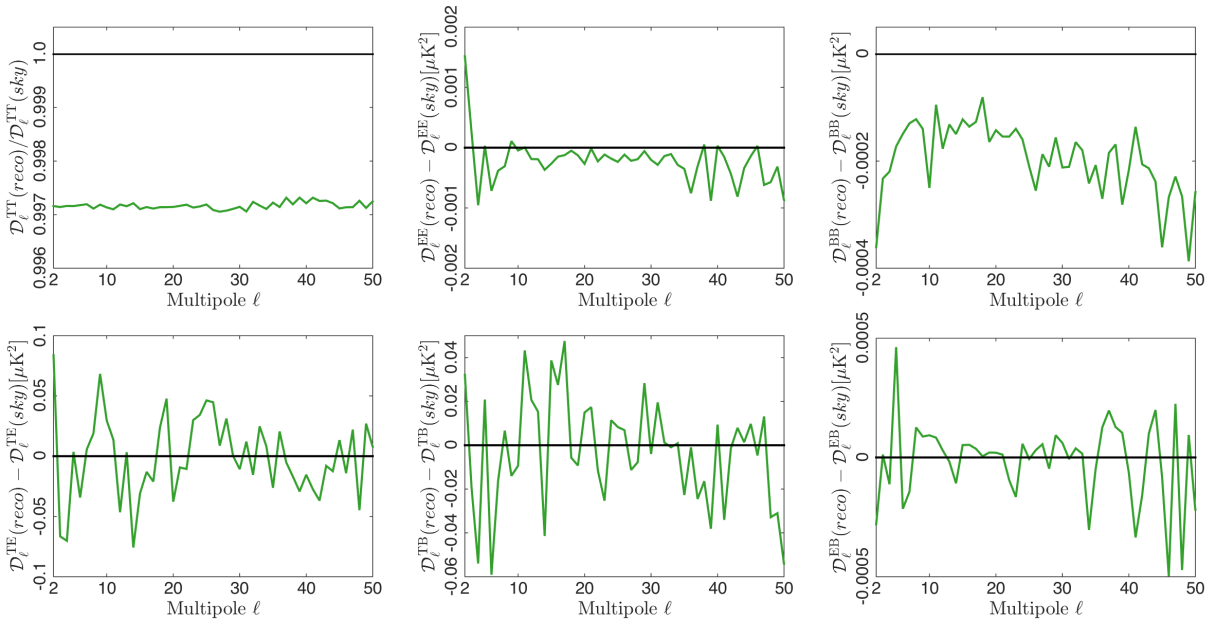


(a) 44 GHz:n taivaan kulmatehospektrien rekonstruktiot.

(b) 44 GHz:n rekonstruoitujen kulmatehospektrien ja simuloidun taivaan kulmatehospektrien vertailukäyrät multipolille $\ell = 50$ asti.



(a) 70 GHz:n taivaan kulmatehospektien rekonstruktio.

(b) 70 GHz:n rekonstruoitujen kulmatehospektien ja simuloidun taivaan kulmatehospektien vertailukäyrät multipolille $\ell = 50$ asti.